VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

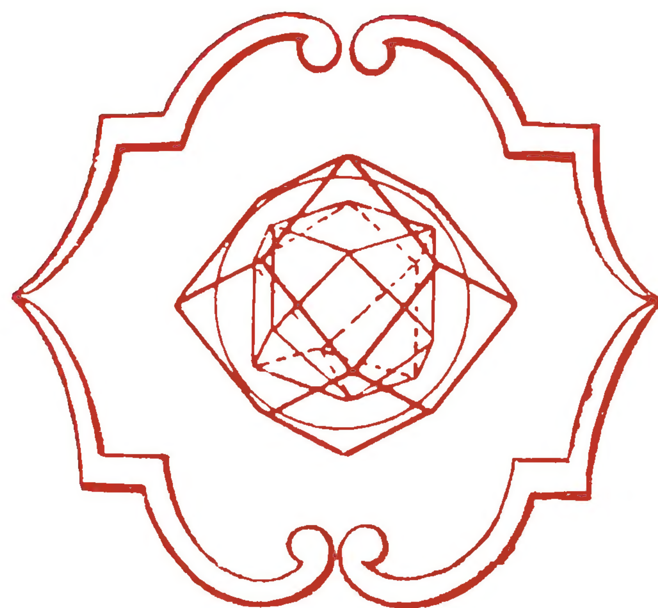
КЛАССИКИ НАУКИ



Е. С. ФЕДОРОВ

НАЧАЛА УЧЕНИЯ О ФИГУРАХ

РЕДАКЦИЯ И ПРИМЕЧАНИЯ
ПРОФЕССОРА О. М. АНШЕЛЕСА,
ПРОФЕССОРА И. И. ШАФРАНОВСКОГО
И СТАРШЕГО НАУЧНОГО СОТРУДНИКА
В. А. ФРАНК-КАМЕНЕЦКОГО



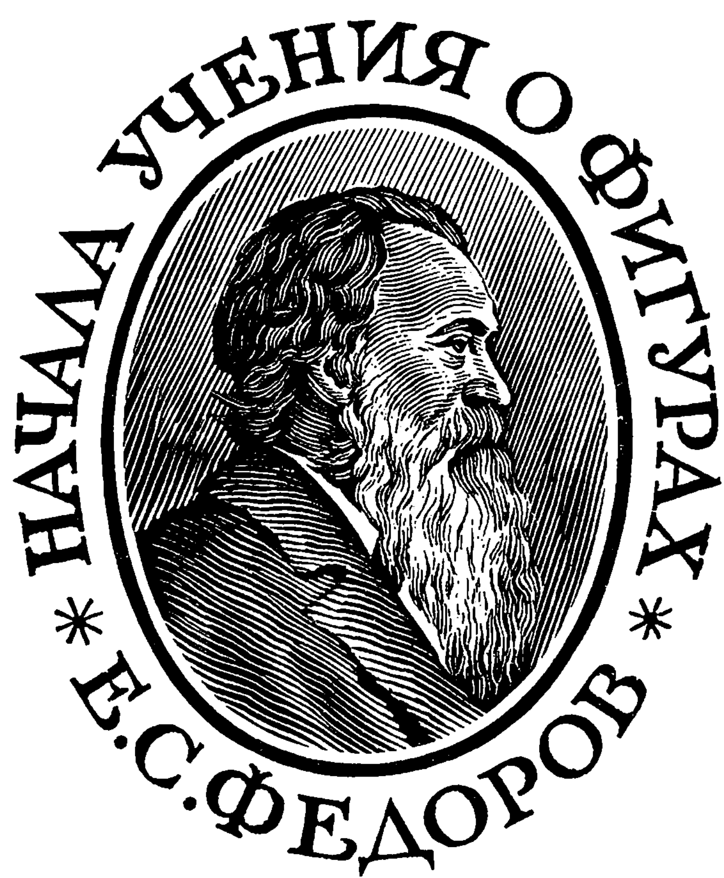
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
1953

СЕРИЯ „КЛАССИКИ НАУКИ“

основана академиком *С. И. Вавиловым*

Редакционная коллегия: академик *И. Г. Петровский* (председатель), академик *К. М. Быков*, академик *Б. А. Казанский*, академик *А. И. Опарин*, академик *О. Ю. Шмидт*, член-корреспондент АН СССР *Н. Н. Андреев*, член-корреспондент АН СССР *Х. С. Коштоянц*, член-корреспондент АН СССР *А. М. Самарин*, член-корреспондент АН СССР *А. А. Максимов*, член-корреспондент АН СССР *Д. И. Щербаков*, член-корреспондент АН СССР *П. Ф. Юдин*, доктор географических наук *Д. М. Лебедев*, доктор химических наук *Н. А. Фигуровский*, кандидат философских наук *И. В. Кузнецов*, кандидат исторических наук *Д. В. Ознобишин* (ученый секретарь).

*


НАЧАЛА УЧЕНИЯ О ФИГУРАХ
Е.С.ФЕДОРОВ

НАЧАЛА
УЧЕНИЯ О ФИГУРАХ



ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие . . . . 15—21

Отдел I. Фигуры открытые

Глава 1. *Понятие о гоноэдрах и их измерении* . . . . 25—45

§ 1. Определения, относящиеся к трехгранным углам 25
§ 2. Условия равенства и симметричности трехгранных углов 26
§ 3. Плоские углы трехгранного угла и их отношение к двухгранным 29
§ 4. Свойства дополнительных трехгранных углов 30
§ 5. Определение гоноэдров вообще и главнейшие свойства последних 34
§ 6. О величине гоноэдров и простейшие случаи определения этой величины 38
§ 7. О гоноэдрах, образующихся двумя параллельными плоскостями, рассеченными третьей 42

Глава 2. *Элементарный способ определения величины гоноэдров и конических углов* . . . . 45—59

§ 8. Связь величины тригоноэдра с величинами составляющих его двугранных углов 45
§ 9. Графическое определение величины тригоноэдра по данным его плоским и двугранным углам 47
§ 10. Определение величины гоноэдров вообще и конических углов 49
§ 11. Отношение гоноэдров к конусам 52

Отдел II. Фигуры сомкнутые

Глава 3. *Сфеноиды и тетраэдр* . . . . 63—79

§ 12. Определения, относящиеся к сфеноидам 63
§ 13. Соотношения между гоноэдрами и двугранными углами сфеноида 65

§ 14. Величина суммы гоноэдров сфеноида 67
§ 15. Отношение сфеноидов к шару 70
§ 16. О равноугольных сфеноидах 73
§ 17. Дисфеноид и его отношение к сфеноиду 74
§ 18. Отношение тетраэдра к ромбическому додекаэдру и особенные свойства последнего 77

Глава 4. *О многогранниках, их плоских и телесных углах и общих условиях их образования* . . . . 79—115

§ 19. Общие понятия о виде многогранников и его типическом представителе 79
§ 20. Соотношение между типическим и подтипическим многогранниками 84
§ 21. Вывод правильных многогранников и основных формул для многогранников вообще 88
§ 22. Соотношения между типическим изоэдром и подтипическим изогоном 98
§ 23. Роды правильных многогранников 101
§ 24. Роды изоэдров и изогонов 104
§ 25. Формулы, относящиеся к изогонам 108
§ 26. Соотношение между гоноэдрами и двугранными углами многогранников 111
Приложение. О формуле Эйлера 113

Глава 5. *Вывод всех возможных изогонов и типических изоэдров* . . . . 115—142

§ 27. Основания этого вывода 115
§ 28. Вывод тригоноэдрических изогонов и тригональных изоэдров 118
§ 29. Вывод тетрагоноэдрических изогонов и тетрагональных изоэдров 130
§ 30. Вывод пентагоноэдрических изогонов и пентагональных изоэдров 138

Глава 6. *Нетипические изоэдры* . . . . 142—148

§ 31. Различные способы образования нетипических изоэдров 142

Глава 7. *Классификация многогранников* . . . . 148—176

§ 32. Систематический свод главнейших соотношений численных элементов многогранника и вывод понятия о классе 148
§ 33. Частные классификации по гомологическим рядам, по видимым признакам 155

Объяснение к таблице изогонов и изоэдров 159
Таблица изогонов и изоэдров 162
Дополнительная заметка к выводу изогонов 171
Приложение. О классификации многогранников 172

Отдел III. Учение о симметрии

Глава 8. *Общие понятия о симметрии и соединении фигур по этому признаку в системы* . . . . 179—188
§ 34. Понятие об осях симметрии и их системах 179
§ 35. Элементарные фигуры системы симметрии 181
§ 36. Вывод понятия об основных изоэдрах и элементарных гоноэдрах системы симметрии 183
§ 37. Начала вывода симметрических фигур 186

Глава 9. *Симметрия частных решений типических изоэдров и подтипических изогонов* . . . . 188—209
Система кубо-октаэдрическая (правильная, кубическая, тессеральная)
§ 38. A. Отделение полногранное 188
§ 39. B. Отделение тетраэдрическое 192
§ 40. C. Отделение додекаэдрическое 194
§ 41. D. Отделение гироэдрическое 197
§ 42. E. Отделение тетартоэдрическое 199
Система додекаэдро-икосаэдрическая
§ 43. A. Отделение полногранное 201
B. Отделение пентагоноэдрическое 202
§ 44. Мэроэдрические соотношения фигур обеих систем . . . 202
§ 45. Симметрия шара 209

Глава 10. *Симметрия общих решений типических изоэдров и подтипических изогонов* . . . . 209—228
Система декагональная
§ 46. A. Отделение полногранное 209
§ 47. B. Отделение скаленоэдрическое 212
§ 48. C. Отделение трапецоэдрическое 213
§ 49. D. Отделение бипирамидальное 215
§ 50. E. Отделение гемиморфное 215
§ 51. Отделения симметрии, получающиеся при совокуплении законов, выведенных раньше 216
F. Отделение дельтоэдрическое 217
G. Отделение пирамидальное 217

§ 52. Резюмирование сделанных выводов 218
§ 53. Особенные фигуры простейших отделений 221
§ 54. Симметрии конусов 222
Первое приложение к отделу III (стр. 177). Исторический очерк 223
Второе приложение (стр. 221). Сопоставление подразделений простейших систем, выведенных в этом произведении, с подразделениями г. Гадолина 225
Третье приложение. Формулы, относящиеся к учению о симметрии 226

Отдел IV. Учение о поясах и выполнении плоскости и пространства

Глава 11. *Выполнение плоскости* . . . . 231—256

§ 55. Вступление. О прямой и обратной параллельности . . . 231
Параллелогоны
§ 56. Общие определения и теоремы о выпуклых фигурах . . 234
§ 57. Вывод простых параллелогонов 236
§ 58. Понятие о сложных и вторичных параллелогонах 238
§ 59. Теоремы, относящиеся к плоским сеткам 239
§ 60. Вывод параллелогонов второго порядка 242
Растяжения и сдвиги
§ 61. Основные теоремы, относящиеся к растяжению 247
§ 62. Основные теоремы, относящиеся к сдвигу 248
§ 63. Теоремы, относящиеся к площадям 250
Планигоны
§ 64. Отношение планигонов к параллелогонам 252

Глава 12. *Пояса и зоноэдры* . . . . 256—283

§ 65. Основные определения и теоремы, относящиеся к зоноэдрам 256
§ 66. Полигональные зоноэдры первого рода 259
§ 67. Полигональные зоноэдры второго рода 265
§ 68. Важнейшие зоноэдры с различными гранями 266
§ 69. Формулы, относящиеся к теоретическим зоноэдрам . . 271
§ 70. Дуальная зависимость между зоноэдрами и парногранниками 275
Растяжения и сдвиги
§ 71. Основные теоремы, относящиеся к растяжению 278
§ 72. Основные теоремы, относящиеся к сдвигу 280
§ 73. Теоремы, относящиеся к объемам 281

Глава 13. *Выполнение пространства* . . . . 283—318

§ 74. Основные определения и развитие понятия об обратном равенстве 283

Параллелоэдры

§ 75. Понятие о системе параллелоэдров 286

§ 76. Основные теоремы, относящиеся к параллелоэдрам . . . 289

§ 77. Систематический вывод всех выпуклых параллелоэдров 291

§ 78. Теоремы об их вторичных поясах 297

§ 79. Их соответственные плоскости и вторичные пояса . . . 298

§ 80. Теоремы об их соответственных точках второго порядка 298

§ 81. Их соответственные прямые и плоскости второго порядка 300

§ 82. Плоские сечения параллелоэдров 302

§ 83. Переходные ступени между параллелоэдрами; фигуры вогнутые, вторичные и фигуры высших порядков 306

§ 84. Стереоэдры и правильные системы точек 308

Приложение к отделу IV. Главнейшие свойства плоских сеток и пространственных решеток и отношение их к системам параллелогонов и параллелоэдров 314

Отдел V. О многогранниках с вогнутыми углами, действительными или кажущимися

Глава 14. *Койлоэдры* . . . . 321—336

§ 85. Общие понятия о койлоэдрах 321

§ 86. Типические изокойлоэдры гомоэдрического отделения кубо-октаэдрической системы 324

§ 87. Типические изокойлоэдры тетраэдрического отделения . 330

§ 88. Типические изокойлоэдры додекаэдрического отделения . 331

§ 89. Отсутствие типических изокойлоэдров в других отделениях той же системы 333

§ 90. Способ означения различных фигур первой степени . . 333

§ 91. Типические изокойлоэдры додекаэдро-икосаэдрической системы 334

§ 92. Заключительные соображения 335

Глава 15. *Многоугольники и многогранники высшей степени* . 336—366

§ 93. Общие понятия о многоугольниках высшей степени . . 336

§ 94. Общие понятия о гоноэдрах высшей степени 340

§ 95. Вывод основной формулы для многогранников высшей степени 341

§ 96. Способ составлять изоэдры высшей степени из изокойлоэдров 344
§ 97. Определение особых изоэдров и изогонов гомоэдрического отделения кубо-октаэдрической системы 350
§ 98. Сравнение полученных результатов с результатами Бадуро 356
§ 99. Составление фигур высшей степени из изокойлоэдров в других отделениях кубо-октаэдрической системы . . . 359
§ 100. Правильные многогранники высшей степени 361

Приложение. О гоноэдрических зеркалах 365

ПРЕДИСЛОВИЕ [1]

Прежде чем приступить к изложению части геометрии, обозначеной в заголовке предлежащего произведения, я считаю полезным познакомить читателей в общих чертах с историей этого предмета. История же эта полна странностями и может быть по своему характеру совершенно исключительна посреди других отделов математических наук.

Самою большою странностью является то обстоятельство, что этот в высшей степени простой отдел элементарной геометрии, каковы, впрочем, и все ее отделы, но в то же время полный математического изящества в такой мере, какой, может быть, не обладает никакой другой отдел того же предмета, остается до сего времени совершенно неразработанным. Притом, отдел этот имеет интерес не только как гармонично связанная в своих частях система простых математических соотношений, но, наоборот, практическая потребность в нем так настоятельна, что за разработку его частей по необходимости брались представители других конкретных наук и прежде всего минералоги. Этот аномальный факт, конечно, не мог быть благоприятным для его развития. Минералоги, побуждаемые к тому практической необходимостью, конечно, выхватывали из него лишь то, что необходимо было для развития разрабатываемого ими самими отдела знаний, т. е. минералогии. Неизбежным результатом такого чуждого вмешательства была односторонность развития самого отдела, неудовлетворительность номенкла-

туры и т. п. С другой стороны, чистые математики, разрабатывая вопросы этого отдела с более общей, и следовательно более правильной, точки зрения, были незнакомы иногда с результатами, полученными минералогами, и потому приходили к совершенно иной постановке предмета и его номенклатуры. Но что особенно характерно для истории этого отдела знаний, это разрозненность работ отдельных исследователей. Сплошь и рядом ученые оказывались незнакомыми даже с трудами, помещавшимися по тому же вопросу в том же журнале, в котором они помещали свои труды. Вследствие этого в этой области мы встречаем примеры столь частого повторения открытий, как, может быть, ни в какой другой научной области. Я приведу теперь для примера повторение открытий по одному весьма важному вопросу этого отдела, а именно определения так называемых полуправильных фигур. Что же касается второстепенных вопросов этой области, то повторения открытий представляют собою такую запутанную сеть, для распутывания которой не хватило бы сил единичного лица.

Ряд этих фигур был известен еще в древности, и в средние века тела эти нызавались архимедовыми; отчасти за ними держится это название и теперь. Но в 1808 г. независимо, и пользуясь несовершенным методом, вывел их Лидонне; в 1819 г. вывод этот в третий раз и опять в несовершенной форме был повторен анонимным автором в „Annales de Gergonne“ (по Бадуро — самим Жергоном). В 1865 г. вывод этот, но уже на основании более совершенного метода, был произведен Каталаном (и был увенчан со стороны Французской Академии наук большой премией). Наконец, в 1878 г. той же Академии был представлен труд Бадуро, часть которого повторяет тот же вывод в пятый раз, и опять автор незнаком с работами своих предшественников.[1]) Дерзну смиренно

[1]) Он откровенно сознается, что „un peu d'érudition m'aurait épargné le temps que j'ai consacré à la recherche de resultats connus; je m'en

прибавить, что вывод тех же фигур, как он сделан в предлежащем произведении, в гл. 5 II отдела, был шестой независимый вывод.[1]) Производя его, автор и не подозревал существования своих предшественников. Произошло это, конечно, потому, что автор не мог предполагать, чтобы имеющий такое значение вывод, и притом всецело принадлежащий области элементарной геометрии, мог бы ускользнуть от внимания последовательного сонма составителей элементарных руководств. Не в этом ли, т. е. в запоздалом развитии самого отдела, и кроется причина разрозненности принадлежащих сюда исследований и повторения открытий?

Некоторые авторы приписывают этому отделу специальные трудности, совершенно подобные тем, какие встречаются в исследованиях по теории чисел. Связь обоих отделов математики действительно несомненна, и я старался оттенить ее как при выводе типических изоэдров, так и при выводе зоноэдров. Но самая простота предмета в его основных началах исключает вообще особые трудности, и я полагаю, что только предвзятыми опасениями можно объяснить, к сожалению, весьма частый в этой области факт вывода каких-нибудь соотношений или фигур ощупью. Таким способом вывел, например, в первый раз свою знаменитую формулу великий математик Эйлер, и лишь во второй статье он отчасти заполнил этот очевидный пробел. Таким же спо-

---

suis consolé en pensant avec M. Catalan au vieux proverbe de jour en jour plus vrai: nil novi sub sole.[2]

[1]) Однако вывод этих фигур, как он предлагается в этом произведении, является в первый раз не только по новости употребленного метода, но отчасти и по самой его цели. В гл. 5 делается именно вывод „всех возможных изогонов и типических изоэдров"; мои же предшественники ограничились лишь наиболее правильными представителями этой группы, т. е. собственно телами Архимеда или „полуправильными" многогранниками, которые Каталан назвал „semireguliers", а Бадуро „isoscèles"; значит вывод этот относится к предшествующим, как общий к частному, а в такой только форме он и пригоден для приложений, например к минералогии.

собом знаменитый математик Пуансо вывел правильные многогранники высшей степени, которые получили впоследствии название тел Пуансо; но он сначала и не подозревал, что сделал полный их вывод. Таким же способом те же Эйлер и Пуансо делали перечисление возможных многогранников с определенным числом вершин или граней. Я не говорю уже о менее известных математиках, у которых такого рода прием встречается весьма часто. Даже из наиболее замечательных и новейших работ, как, например, в упомянутой уже работе Бадуро (Badoureau. Mémoire sur les figures isoscèles) употребляются приемы, граничащие с выводом ощупью. Выводя особые изогоны высшей степени, автор этот пользуется методом построения, который, конечно, не дает никакого ручательства его полноты и, по необходимости, в некоторой неуверенности оставляет самого автора. В главе о многогранниках высшей степени действительно указываются попутно его промахи, которыми он обязан употребленному методу.

Достаточно сказанного, чтобы показать, что центральные ученые учреждения не могли не сознавать заброшенности этого отдела знаний и не принять со своей стороны каких-нибудь мер для устранения этой ненормальности. Поэтому становится вполне понятною и естественною выставление со стороны Французской Академии наук в 1863 г. следующей темы для конкурса на получение большой премии: *„Perfectionner, en quelque point important, la théorie géometrique des polyèdres“*.[3] Самая неопределенность этой темы служит лучшим свидетельством того, что авторы этой постановки вопроса отчетливо сознавали всю неразработанность этого отдела геометрии. Со времени этого призыва знаменитого ученого учреждения внимание математиков к этой области действительно значительно возросло, и с того времени непрерывным потоком является на страницах различных математических журналов ряд исследований, принадлежащих этой области.

Однако, несмотря на обилие работ и продолжительность истекшего времени, дело подвинулось еще мало вперед. Число систематических работ, вышедших в течение этого времени, крайне невелико. Громадное же их большинство имеет весьма узкие цели и нередко ведено с помощью весьма несовершенного метода, так что и до сих пор многие светила математики относятся к самому отделу с большим недоверием.[1])

Переходя к общему взгляду на состояние этого отдела в настоящую минуту, мы замечаем, и это можно было предвидеть из вышесказанного, что обработка разных входящих сюда вопросов крайне неравномерна. Тогда как одни вопросы вызвали целую литературу, например вывод численных соотношений между элементами многогранника, ушедшую далеко из области реальных приложений вглубь отвлеченных математических спекуляций, другие важные вопросы и даже целые отделы остались нетронутыми; сюда относятся именно отделы о зоноэдрах и выполнении пространства, отделы, могущие доставить неисчерпаемую пищу математическим спекуляциям. Особенно замечательна неприкосновенность отдела о выполнении пространства равными фигурами, так как со времени Гаюи в отделе этом минералогия ощущала безусловную потребность. Достаточно вспомнить камень преткновения для теории кристаллической структуры этого замечательного минералога, чтобы убедиться в справедливости сказанного. Камень преткновения для этой теории, как известно, состоял в том факте, что имеется спайность по октаэдру. Если бы Гаюи знал о существовании и свойствах

[1]) Этим недоверием только могу я объяснить случай, относящийся к самому предлежащему произведению. Когда в первый раз (в 1881 г.) я представил его в здешнюю Академию наук в лице г. академика Чебышева, то последний отказался принять его, мотивируя свой отказ тем, что этим отделом современная наука не интересуется. Из слов почтенного академика видно, что он не представляет возможности систематических выводов в этой области и думает, что все они производятся ощупью.

особого притупленного октаэдра, то ему не пришлось бы прибегать к натяжкам для объяснения этого факта, натяжкам, заставившим его последователей отрешиться от его первоначальной гипотезы и прибегать к помощи других. Если бы современные минералоги были знакомы с теорией параллелоэдров, им не пришлось бы за элементы структуры кристаллов правильной системы принимать в некоторых случаях ромбоэдры.

Я имел честь, начиная с 1881 г., представить имп. Минералогическому обществу ряд докладов по теории кристаллической структуры[4] и, так как доклады эти подразумевают знакомство со многими выводами, в первый раз изложенными в предлагаемом произведении, то этим и объясняется появление самой работы на столбцах „Записок" этого общества.

Обращаясь теперь к предлежащему произведению, я должен сказать, что громадное большинство выводов произведено самостоятельно, все заимствования всегда точно указаны, и лишь те выводы, которые стали обязательным достоянием общепринятых руководств, не снабжены ссылками. Многочисленные же другие ссылки приведены лишь с целью ознакомить читателей с литературой предмета.

В основе произведения лежит отчетливое сознание аналогии, существующей между плоскими и телесными фигурами, и потому как плоский угол является основным строительным элементом плоских фигур, так и в предлагаемом произведении все главнейшие выводы строятся на изучении телесного угла как строительного элемента телесных фигур. Различные соображения заставили меня придать этому элементу новое и, как я полагаю, более общее и удобное название — *гоноэдр*.[5] Вообще же, стараясь, где можно, достичь улучшения номенклатуры по отношению ее рациональности и общности, я избегал уклоняться от общепринятых терминов и решался изменять их лишь в тех случаях, где я полагал в том необходимость. Геометрические термины, заимствованные от реальных предметов, например лейцитоэдр, гранатоэдр и т. д.,

впрочем и без того не особенно твердо установившиеся, я не допускал совершенно, так как, полагаю, этим нарушается сама́я общность математических терминов; и действительно, раз является доказанным, что лейцит не принадлежит к минералам правильной системы, какой смысл остается за термином лейцитоэдр? Но такого рода противоречие всегда может явиться, если отвлеченное понятие закреплено конкретным одеянием, и я полагаю, что такие любители нововведений, как, например, Вакернагель, которые даже вместо куба говорят „галоэдр", а вместо правильного додекаэдра — „пятичленный галоэдр", наиболее способствуют хаотическому состоянию номенклатуры.

Цель этого произведения — изучение телесных фигур, но для достижения самой цели потребовалось во многих случаях остановиться и над плоскими фигурами. В этих случаях изложение сделано возможно сжато, и притом соответственные термины телесных фигур нередко прямо переносились на плоские, как, например, типический многоугольник и т. п. Вообще я стремился достичь возможного равновесия в изложении и уделять каждому вопросу место, соответствующее его важности. Поэтому при вообще сжатом изложении столь громадного отдела, те его части, которые не находят пока непосредственных практических приложений, как, например, теория многогранников высшей степени, представлены здесь лишь в своих основных принципах.

Отдавая это свое произведение на суд ученой публики, я вполне сознаю многие его несовершенства и промахи и надеюсь, что приговор будет снисходителен ввиду того обстоятельства, что труд этот представляет первую попытку систематического изложения всех существенных отделов элементарного учения о телесных фигурах.

ОТДЕЛ
I

ФИГУРЫ ОТКРЫТЫЕ



Глава 1

ПОНЯТИЕ О ГОНОЭДРАХ И ИХ ИЗМЕРЕНИИ

§ 1. Определение 1. Трехгранным углом называется безграничная часть пространства, заключающаяся между тремя пересекающимися плоскостями.

Примечание. В трехгранном угле следует различать вершину, три плоских, три двугранных угла и три ребра. В нем каждой грани противолежит ребро, и наоборот.

Определение 2. Трехгранные углы называются равными, если при наложении друг на друга приличным образом могут быть совмещены. В противном случае они неравны.

Определение 3. Симметричными или противоположно равными трехгранными углами называются такие, которые можно так приложить друг к другу, чтобы ребра и грани одного из них составляли продолжение ребер и граней другого.

Примечание. Ясно, что два таких угла можно расположить симметрично относительно некоторой плоскости.

Определение 4. Прямым трехгранным углом называется такой, у которого все три двугранных угла прямые.

Определение 5. Вертикальным (или призматическим) трехгранным углом называется такой, у которого два двугранных угла прямые.

Определение 6. Прямоугольным трехгранным углом называется такой, у которого один двугранный угол прямой.

Определение 7. Правильным (или тригональным) трехгранным углом называется такой, у которого все двугранные углы равны между собой.

Определение 8. Равнобедренным трехгранным углом называется такой, у которого два двугранных угла равны между собой.

Следствие a. В прямом трехгранном угле все плоские углы прямые. В самом деле, каждые две грани, будучи перпендикулярны к третьей, должны пересекаться по прямой, перпендикулярной к последней, а следовательно, и углы между ребрами пересечения граней должны быть прямые.

Следствие b. В вертикальном угле плоские [углы], противолежащие прямым двугранным, должны быть прямыми. Доказательство этому то же, что в предыдущем случае; только вместо каких угодно двух граней в рассмотрение нужно привлечь те две, которые перпендикулярны к третьей. Очевидно, что вертикальный трехгранный угол всегда равнобедренный.

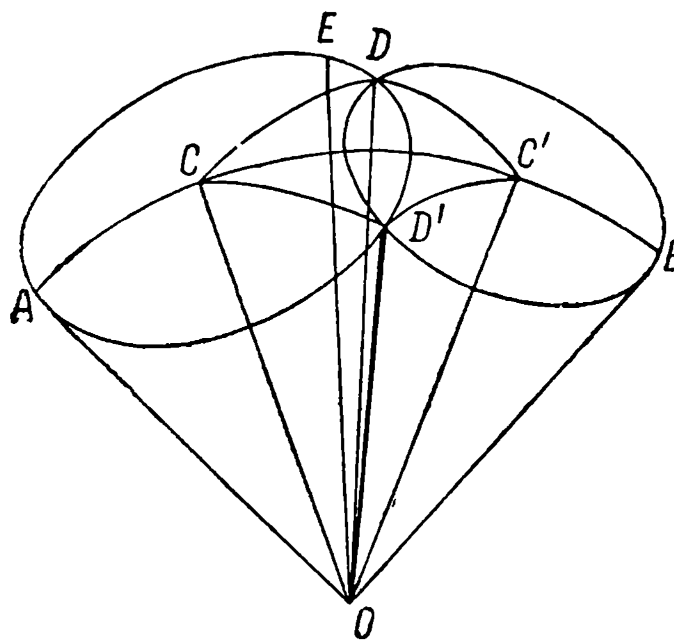
Следствие c. Два равных правильных или равнобедренных трехгранных угла симметричны между собою.

§ 2. Теорема 1. *Два трехгранных угла равны между собою, если все три их плоских угла соответственно равны и соответственно расположены; если же плоские углы равны, но расположены противоположно, то трехгранные углы симметричны.*

Примечание. Под словами *соответственное расположение* или *расположение в одинаковой последовательности* мы будем понимать такое, когда при помещении углов вершинами по направлению к глазу и при следовании глазом от одной соответственной грани к другой ось глаза в обоих случаях будет описывать дугу или по направлению часовой стрелки, или по направлению обратному; напротив того, если при этих условиях ось глаза, следящего за гранями одного угла, будет перемещаться по часовой стрелке, и следящего за гранями дру-

гого угла, — будет перемещаться по обратному направлению, то расположение граней у двух данных углов будет противоположное. [1])

Пусть угол COC' (фиг. 1) будет один из данных плоских углов. Примем ребра OC и OC' за оси вращения, и опишем около них два конуса вращения $OADD'$ и $OBD'D$, приняв за углы растворения углы вдвое бо́льшие двух других данных плоских углов. Затем, из O, как из центра, произвольным радиусом опишем шаровую поверхность; пусть последняя пересечет оба конуса по окружностям ADD' и $BD'D$, пересекающимся между собою в точках D' и D. Нетрудно видеть, что углы $O.CC'D$ и $O.CC'D'$ имеют все три плоских угла, равные данным, но их грани расположены противоположно. Если бы нам была задана та именно последовательность плоских углов, которая существует в трехгранном угле $O.CDC'$, то нетрудно доказать, что этот угол представлял бы единственное возможное решение. В самом деле, искомое ребро OD должно одновременно находиться на обеих конических поверхностях, и следовательно — на прямой их пересечения; если бы оно расположилось по прямой OE вне конуса $ODBD'$, то угол EOC' не был бы равен данному, а был бы больше, а если бы OE проходила внутри того же конуса, то угол был бы меньше данного.



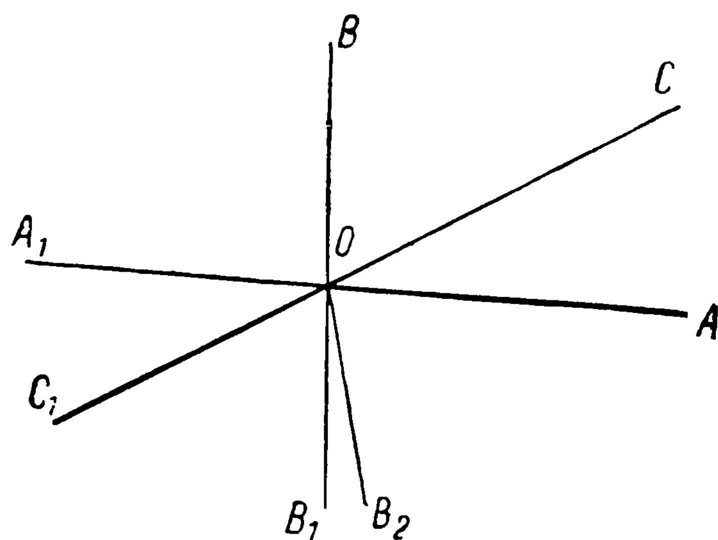
Фиг. 1.

Если же два данных угла $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ (фиг. 2) имеют противоположное расположение граней, то мы можем

---

[1]) Общее определение расположения направлений в одну и ту же или противоположную сторону см., например: Гадолин. Вывод всех кристаллографических систем. Зап. Мин. Общ., ч. IV, стр. 115, 1869.

совместить в точке O их вершины и расположить грани AOC и A_1OC_1 так, чтобы AO составляло продолжение A_1O и CO — продолжение C_1O. Если бы ребро OB_1 не пошло по продолжению ребра OB и приняло бы какое-нибудь положение OB_2, то, продолжив OB, мы получили бы новый трехгранный угол $OA_1B_1C_1$, у которого все плоские углы были бы равны плоским углам трехгранного угла $OA_1B_2C_1$ и одинаково с ними расположены, а это, как мы доказали, невозможно; следовательно, ребро OB_2 должно совпасть с OB_1, т. е. с продолжением OB; значит, и трехгранный угол $OA_1B_1C_1$ симметричен углу $OABC$.



Фиг. 2.

Теорема 2. *Трехгранные углы равны между собой, если два каких-нибудь плоских угла одного соответственно равны двум плоским углам другого, если двугранный угол одного, лежащий между данными плоскими углами, равен соответственному двугранному углу другого и если данные части расположены в одинаковой последовательности. Если же они расположены в противоположной последовательности, то трехгранные углы симметричны.*

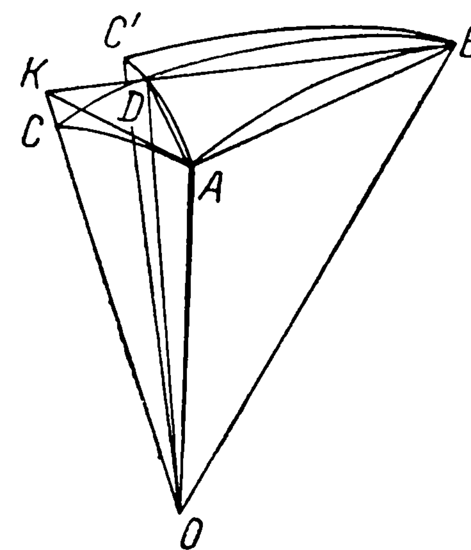
Первая часть теоремы легко доказывается наложением, а вторая — подобно предыдущему случаю.

Теорема 3. *Трехгранные углы равны между собой, если два плоских угла одного соответственно равны двум плоским углам другого, если двугранный угол, противолежащий одному плоскому, равен соответственному двугранному углу другого, данные части расположены в одинаковой последовательности, и притом известно, будет ли двугранный угол, противолежащий другому плоскому, острый или тупой. Если же расположение противоположное, то трехгранные углы симметричны.*

Эта теорема доказывается подобно предыдущим.

§ 3. Теорема 4. *Сумма двух плоских углов в трехгранном угле всегда больше третьего.*

Это положение можно принять без доказательства, совершенно так же, как то, что ломаная больше прямой, так как в основании обоих положений лежит одна и та же очевидность, в первом случае по отношению к плоскости, а во втором по отношению к сфере. Однако, основываясь на последнем положении, можно доказать и первое. В самом деле, вообще один из плоских углов данного трехгранного наибольший, а для того случая, когда имеется по крайней мере два равных наибольших угла, положение очевидно само по себе. Пусть же угол BOC (фиг. 3) будет наибольший; докажем, что $BOC < AOB + AOC$. Отложим на первом часть $BOD = BOA$ и части $OB = OD = OA$. Соединив B с A и D прямыми и продолжив BD до пересечения с OC в точке K, получим $\triangle BOD = \triangle AOB$, следовательно $BA = BD$, и так как $BK = BD + DK < AB + AK$, то $DK < AK$, а потому и угол $DOK < AOK$, следовательно и $DOK + BOD = BOK < BOA + AOK$.



Фиг. 3.

Теорема 5. *Если в двух трехгранных углах два плоских угла одного соответственно равны плоским углам другого, а двугранные углы, лежащие между ними, не равны, то большему двугранному углу противолежит больший плоский, и наоборот.*

Совместим равные плоские углы AOB (фиг. 3) обоих трехгранных углов, и пусть два других равных плоских угла будут AOC и AOC'; пусть двугранный угол $AO.CB$ больше $OA.C'B$; докажем, что плоский угол COB больше $C'OB$. Опишем из O, как из центра, радиусом, равным единице, шаровую поверхность; она, пересекаясь с плоскостями дан-

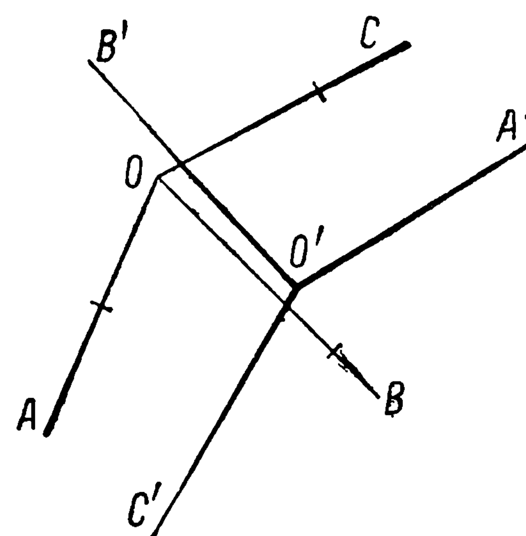
ных углов, дает дуги большого круга[6] AB, BC и CA и AB, BC' и $C'A$. На основании предыдущей теоремы пишем: $C'OD + DOB > C'OB$, или, что все равно, $C'D + DB > C'B$; также $CD + DA > CA$; следовательно, $C'D + DB + CD + DA = BC + AC' > CA + C'B$, а так как по условию $AC' = AC$, то $BC > BC'$, т. е. угол $BOC > BOC'$.

Примечание. Из предыдущих теорем легко видеть аналогию между свойствами трехгранных углов и плоских треугольников; легко видеть также, что дуги, получающиеся от пересечения плоскостей трехгранного угла шаровой поверхностью радиуса, равного единице, описанной из его вершины как из центра, равные по своей мере плоским углам, играют в этой аналогии роль сторон, а двугранные углы или углы между прямыми, касательными к дугам, — углов последнего. Вследствие этого изучение трехгранных углов сводится к изучению *сферических трехугольников*, т. е. тех трехугольников, стороны которых суть дуги круга или линии пересечения сферы (шаровой поверхности радиуса, равного единице) с гранями данного угла.

§ 4. Определение 9. Взаимно дополнительными или полярными трехгранными углами называются два таких, у которых плоские углы одного составляют дополнение до $2d$ двугранным углам другого, и наоборот.

Примечание. Это определение ясно подразумевает известные соотношения, которые нужно доказать, что мы сейчас же и сделаем. Пусть из точки O' (фиг. 4), взятой где-нибудь внутри трехгранного угла $OABC$, опущены на грани этого угла перпендикуляры $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$; получаем новый трехгранный угол $O'A'B'C'$. Ясно, что, так как $O'B' \perp AOC$ и $O'C' \perp AOB$, то и, наоборот, $AO \perp B'O'C'$; также докажем, что $BO \perp A'O'C'$ и $CO \perp A'O'B'$. Поэтому плоские углы пересечения граней построенного угла с двумя гранями данного будут служить мерою двугранных углов последнего, так же как углы пересечения граней данного угла с двумя гранями постро-

енного будут служить мерою двугранных углов построенного, а в силу этого для этих двух углов $O.ABC$ и $O'.A'B'C'$ имеют место все те соотношения, которые входят в определение двух взаимно дополнительных трехгранных углов. На основании этого два взаимно дополнительных угла мы можем определить как такие, которые можно так расположить один по отношению к другому, чтобы ребра одного были перпендикулярны к граням другого, и наоборот. Отсюда непосредственно вытекает:



Фиг. 4.

Следствие a. Равным трехгранным углам соответствуют равные взаимно дополнительные углы, причем равным плоским будут соответствовать равные двугранные углы дополнительного, бо́льшим плоским — меньшие двугранные и меньшим плоским — бо́льшие двугранные, и наоборот.

На основании этого же определения и теорем 1—3, а также следствия „a“, получаем:

Следствие b. Трехгранные углы равны между собой, если все двугранные углы одного соответственно равны двугранным углам другого и данные части одинаково расположены; если же они расположены противоположно, то трехгранные углы симметричны.

Следствие c. Трехгранные углы равны между собой, если два каких-нибудь двугранных угла одного соответственно равны двум двугранным углам другого, если плоский угол одного, лежащий между двумя данными двугранными углами, равен соответственному плоскому углу другого и если данные части расположены в одинаковой последовательности. Если же последовательность противоположная, то трехгранные углы симметричны.

Следствие d. Трехгранные углы равны между собой, если два двугранных угла одного соответственно равны

двум двугранным углам другого, если плоский угол, противолежащий одному двугранному углу, равен соответственному плоскому углу другого, а относительно другого противолежащего плоского угла дано, острый он или тупой, и данные части расположены в одинаковой последовательности. Если же последовательность противоположная, то трехгранные углы симметричные. Наконец, привлекая сюда определение § 1, получим:

Следствие e. Все прямые трехгранные углы равны.

Следствие f. Вертикальные трехгранные углы равны между собой, если один из плоских, кроме прямого, или один из двугранных, также кроме прямого, в одном из них равен соответственному плоскому или двугранному углу другого.

Из теоремы 5 вытекает обратное ей следствие, а именно:

Следствие g. Если в двух трехгранных углах два двугранных равны между собой, а плоские, лежащие между ними, не равны, то бо́льшему плоскому углу противолежит и бо́льший двугранный, и наоборот.

Из теоремы 4 вытекает:

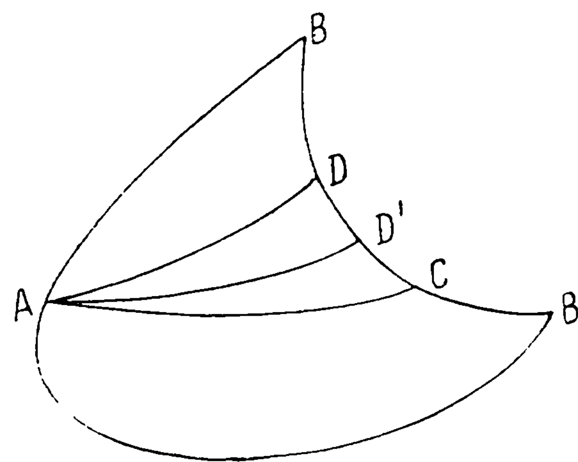
Следствие h. Сумма двух двугранных углов меньше $2d +$ третий двугранный. В самом деле, означив через a, b и c плоские углы, $2d - a$, $2d - b$ и $2d - c$ будут двугранные углы дополнительного, а так как $a + b > c$, то $-a - b < -c$ и $(2d - a) + (2d - b) < 2d + (2d - c)$.[7]

Примечание. На основании предыдущих обозначений, все эти теоремы и следствия можно формулировать и иным образом, называя плоские углы сторонами, а двугранные углы — углами сферического треугольника. Например, следствие „b“ можно выразить так: сферические трехугольники равны, если углы одного равны углам другого и части расположены в одинаковой последовательности. Следствие „h“ можно выразить так: сумма двух углов сферического трехугольника меньше $2d +$ третий угол.

Выведем в новой терминологии другие теоремы.

Теорема 6. *В одном и том же сферическом трехугольнике против равных сторон лежат равные углы, и наоборот.*

Пусть в сферическом трехугольнике ABC (фиг. 5) $AB = AC$. Делим BC пополам и соединяем полученную точку D с точкой A (т. е. через точки A, D и центр сферы проводим плоскость до пересечения с последней). Получаем два трехугольника ABD и ACD, в коих $AB = AC$ по условию, $BD = CD$ по построению и AD — общая. Следовательно (теорема 1), трехугольники симметричны, а потому угол $ABD = ACD$.



Фиг. 5.

Если бы было дано, что $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB$, то пришлось бы различить два случая:

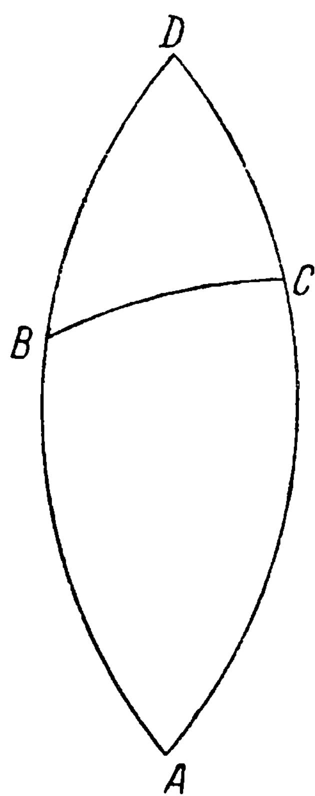
1) BAD и $DAC < d$. Делим BC пополам и получаем $ABD = ACD$, $BD = CD$ и AD — общая для двух трехугольников; следовательно (теорема 3), трехугольники ABD и ACD симметричны, а потому $AB = AC$.

2) Если бы, разделив BB' пополам в точке D' и соединив D' с A, мы получили бы при A острый и тупой угол, то теорема была бы несправедлива. Нетрудно убедиться, однако, что в этом случае сферический трехугольник превращается в двухсторонник. [8]

Теорема 7. *Сумма углов сферического трехугольника заключается между $2d$ и $6d$, а сумма сторон между 0 и $4d$, при условии, если ни один из плоских углов не более $2d$.*

Положим, что данный трехугольник есть ABC (фиг. 6). Продолжим до пересечения в точке D стороны AB и AC; они должны пересечься, потому что выражают две плоскости, проходящие через центр сферы, и, значит, пересекаются на сфере именно в точках диаметрально противоположных. Итак, $ABD = 2d$ и $ACD = 2d$, но $BD + CD > BC$, следова-

тельно $ABD + ACD = 4d > AB + BC + AC$. Что сумма трех плоских углов может быть сделана сколь угодно малой, очевидно. Теперь стоит только заменить выражения для плоских углов соответствующим выражением для дополнительных двугранных, чтобы доказать и остальную часть теоремы. Действительно, означив плоские углы через a, b и c, получим $a + b + c < 4d$ или $2d - A + 2d - B + 2d - C < 4d$, а также $a + b + c > O$ или $2d - A + 2d - B + 2d - C > O$, откуда выходит, что $2d < A + B + C < 6d$, что и требовалось доказать.[9] Из теоремы 6 вытекает:



Фиг. 6.

Следствие a. Правильные сферические трехугольники равны, если одна из частей одного равна соответственной части другого.

Следствие b. Равнобедренные сферические трехугольники равны, если две какие-нибудь части (только, конечно, не две равные) одного равны двум соответственным частям другого.

Следствие c. Кроме того, прямоугольные сферические треугольники равны или симметричны, смотря по расположению частей, если соответственно равны:

1) оба катета,

2) оба угла,

3) угол и катет.

Остальные условия равенства не отличаются по формулировке от общих; только во всех случаях приходится принять во внимание равенство прямых углов.

§ 5. Определение 10. Многогранным углом называется безграничная часть пространства, заключающаяся между несколькими плоскостями, пересекающимися в одной точке, называемой вершиной угла.

Примечание a. Ввиду того, что „многогранный угол" как термин неудобен по своей длинноте, а также и потому, что противополагается „трехгранному углу" как другому термину, тогда как, как мы сейчас увидим, это противоположение не имеет никакого существенного основания, мы соединим в последующем изложении оба эти термина в один — *гоноэдр*, причем для того, чтобы выразить, где это нужно, истинное число граней, будем употреблять приставку, выражающую это число; например: тригоноэдр означает трехгранный угол, тетрагоноэдр — четырехгранный угол и т. д.

Примечание b. В каждом гоноэдре имеется столько же плоских, сколько и двугранных углов, что легко видеть, если сделать сечение угла плоскостью, причем получается многоугольник с тем же числом углов, сторон и вершин, сколько в гоноэдре двугранных и плоских углов и ребер.

Если же из вершины гоноэдра, как из центра, описать сферу, то получится сферический многоугольник; его стороны будут измерять плоские углы гоноэдра, его углы — двугранные углы гоноэдра, а его вершины будут соответствовать ребрам.

Определение 11. Гоноэдры называются равными, если при наложении одного на другой приличным образом они совместятся.

Определение 12. Гоноэдры называются симметричными или противоположно равными, если их можно так расположить, чтобы все ребра одного составляли продолжение ребер другого.

Примечание. Как для тригоноэдра, так и для всякого другого мы можем найти такое расположение, чтобы они стали симметричными относительно какой-нибудь плоскости, если сами взятые гоноэдры симметричны.

Определение 13. Гоноэдр называется правильным

(или полигональным[10]), если все его плоские и двугранные углы соответственно равны друг другу.

Примечание. Ясно, что правильному гоноэдру отвечает правильный сферический многоугольник.

Определение 14. Гоноэдр называется выпуклым, если все его двугранные углы меньше $2d$.

Примечание. Из определения 14 вытекает, что теорема 7 относится к выпуклым тригоноэдрам.

Определение 15. Два гоноэдра называются полярными или дополнительными, если их можно так расположить один по отношению к другому, чтобы все ребра одного были перпендикулярны к граням другого, и наоборот.

Примечание a. Ясно, что это определение, а также более частное определение 9 относятся только к выпуклым гоноэдрам. В самом деле, назвав двугранные углы гоноэдра через A, B, $C, \ldots$, получим, что плоские углы дополнительного будут $2d - A$, $2d - B$, $2d - C, \ldots$; если бы один из углов A, $B, \ldots$ был бы больше $2d$, то пришлось бы принять существование отрицательных плоских углов, что выходит из предела имеющихся здесь в виду условий.

Примечание b. Легко видеть, что к дополнительным гоноэдрам вообще можно приложить те же рассуждения, которые в предыдущем параграфе относились к дополнительным тригоноэдрам, а потому из них вытекают те же следствия, т. е.:

Следствие a. Плоские углы гоноэдра дополняют до $2d$ двугранные углы дополнительного, и наоборот.

Следствие b. Равным или симметричным гоноэдрам отвечают равные же или симметричные дополнительные.

Теорема 8. *Гоноэдр об n граней можно разделить на $n - 2$ тригоноэдра.*

В самом деле, построив соответствующий сферический n-угольник, мы его легко разделим на $n - 2$ сферических

трехугольника. Еще проще заменить сферический многоугольник плоским, происшедшим от сечения гоноэдра какой-нибудь плоскостью, не параллельной ни одной из граней последнего.

Следствие a. На основании этой теоремы непосредственно вытекает, что условия равенства гоноэдров вообще таковы: если два данных гоноэдра можно разбить на одинаковое число равных и одинаково расположенных тригоноэдров, то гоноэдры равны между собой.

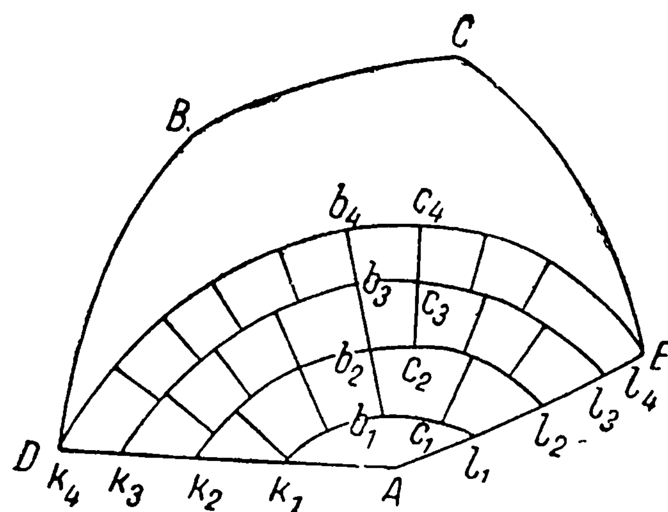
Следствие b. Условия же симметричности выразятся так: если два гоноэдра разбиваются на одинаковое число симметричных и расположенных в обратной последовательности тригоноэдров, то гоноэдры симметричны.

Следствие c. Правильные гоноэдры равны и симметричны, если имеют одно и то же число граней и если один из плоских или двугранных углов одного равен соответственному углу другого.

Теорема 9. *Каждый гоноэдр можно разбить на весьма большое число весьма малых тетрагоноэдров, отличающихся один от другого на величину бесконечно малую.*

Пусть нам дан гоноэдр или, что все равно, сферический многоугольник $ADBCE$ (фиг. 7). Проведем ряд параллельных кругов k_1l_1, $k_2l_2, \ldots$ так, чтобы величины дуг b_1b_2, $b_2b_3, \ldots$ по меридиану были бы равны между собой. Легко видеть, что если примем эти дуги за направляющие, а за производящую возьмем прямую, проходящую через центр сферы, то получим ряд конических поверхностей с углами растворения n_1, n_2, $n_3, \ldots$ Пусть $n_1 - n_2 = n_2 - n_3$ равен какой-нибудь весьма малой величине, например 10^{-p}, где p — положительная величина, бóльшая всякой данной. Разделим дугу k_1l_1 с наименьшим радиусом на весьма большое число равных частей,[11] исходя в ту и другую сторону от меридиана b_1b_2, и чрез каждую точку деления проведем часть меридиана до пересечения с следующей дугой k_2l_2; последнюю, в свою очередь, разделим на части, равные частям b_1c_1, и опять

чрез точки деления проведем части меридиана, и т. д. Таким образом, площадь сферического многоугольника разбивается на площади бесконечно малых равнобедренных трапеций; так как величины их сторон бесконечно малы, то они отличаются бесконечно мало от прямых (т. е. хорд, стягивающих эти стороны); высоты этих трапеций равны между собою. С другой стороны, оба основания каждой трапеции разнятся друг от друга на величину, меньшую всякой данной, а также и основания всех трапеций, обращенные к первой дуге $k_1 l_1$; поэтому и средние основания всех трапеций отличаются друг от друга на величину, меньшую всякой данной. Следовательно, величины площадей этих трапеций или соответствующих тетрагоноэдров (элементарных) отличаются одна от другой на бесконечно малые величины.



Фиг. 7.

Итак, всякий гоноэдр можно рассматривать как предел суммы равных тетрагоноэдров.

§ 6. Определение 16. Гоноэдры называются равномерными, если их можно составить из одинакового числа равных гоноэдров.

Следствие а. Гоноэдры равномерны, если сами составляют равные части равномерных гоноэдров. В самом деле, пусть два гоноэдра p_1 и p_2 составляют $\frac{1}{a}$ часть углов, выражающихся величиною p. На основании предыдущей теоремы мы можем представить себе p разделенным на некоторое, большее всякого данного, число n равных тетрагоноэдров π. Как в p_1, так и в p_2 таких π поместится $\frac{n}{a}$ — частное, которое можно принять за целое число, так как a — величина конечная, а n — бо́льшая всякой данной. Итак, $p_1 = \frac{n}{a}$ и $p_2 =$

$=\frac{n}{a}$, т. е. $p_1=p_2$ и, значит, данные гоноэдры равномерны.

Следствие b. Из хода доказательства теоремы 9 легко видеть, что величины гоноэдров пропорциональны площадям соответствующих сферических многоугольников.

Следствие c. Отсюда следует также, что величины гоноэдров пропорциональны объемам секторов, ограниченных с одной стороны гранями гоноэдра, а с другой — сферою.

Следствие d. Симметричные гоноэдры равномерны, так как их можно составить из одинакового числа равных элементарных гоноэдров.[1])

Следствие e. Так как на двугранный угол можно смотреть как на тригоноэдр, у которого один из двугранных углов равен $2d$, то все предыдущие следствия распространяются и на двугранные углы.

Если какие-нибудь три плоскости U, H и W (фиг. 8) пересекаются в одной точке O, то около нее образуется восемь тригоноэдров, имеющих общую вершину в O — по четыре с каждой стороны какой-нибудь из этих плоскостей. Легко видеть, что каждый из этих четырех углов симметричен одному из остальных четырех, так $O.ABE$ симметричен $O.CDF$, $O.BCE$ — $O.ADF$, $O.CDE$ — $O.ABF$ и $O.ADE$— $O.BCF$. По положению, эти углы один по отношению к другому называются *противоположными.*

Итак, противоположные тригоноэдры симметричны.

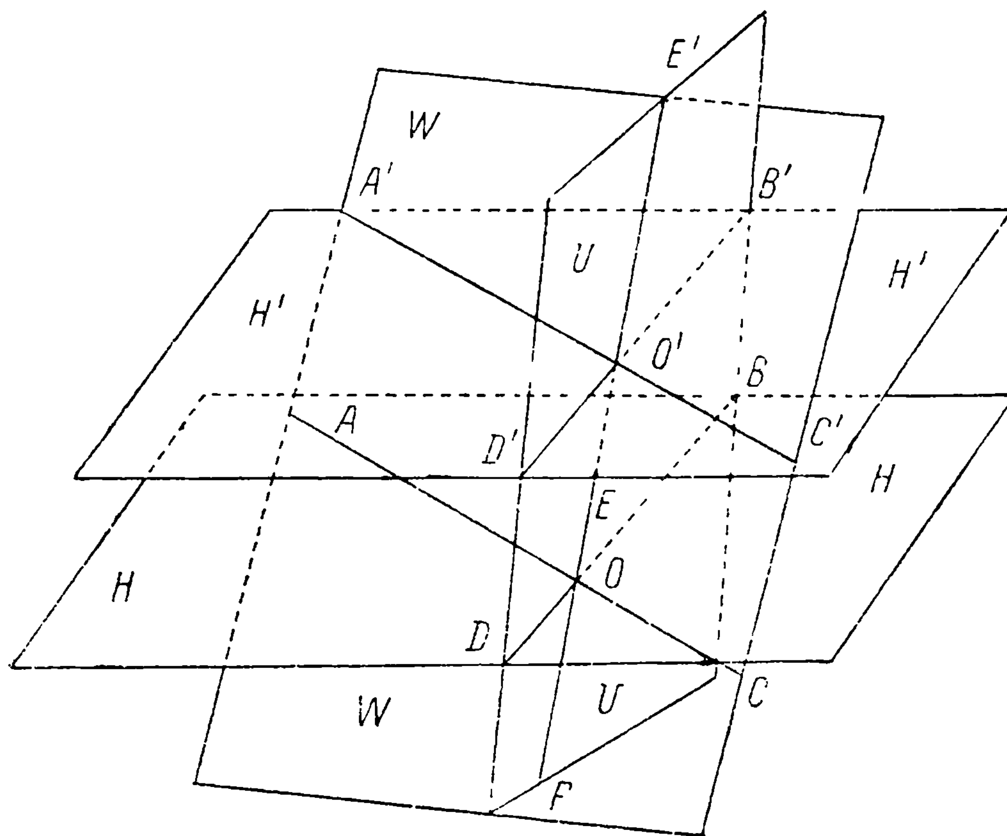
Определение 17. Смежными по ребру[2]) называются два таких тригоноэдра, у которых одно ребро общее, состав-

[1]) Гервин показал, что всякие две равномерные фигуры на сфере (так же, как и на плоскости) всегда можно разделить на равные части. Этот вывод позволяет непосредственно пользоваться определением 16; в общем случае построение будет, однако, очень длинно и сложно. См. Gerwin, Crelle Journ., т. 10, стр. 235 и сл., 1833.

[2]) Scheiteldreiecke; см.: Baltzer. Die Elemente der Mathematik. Изд. 5 (2), стр. 166.

ляющие же грани, а также оба остальных ребра одного составляют продолжение соответственных граней и ребер другого тригоноэдра. Например, $O.ABE$ и $O.CDE$ смежные по ребру.

Определение 18. Смежными по грани[1]) называются два таких тригоноэдра, у которых одна грань общая, а про-



Фиг. 8.

тиволежащие ей ребра составляют прямую линию, например $O.ABF$ и $O.CBF$.

Примечание. Легко видеть, что оба эти угла составляют вместе один двугранный, коего ребро есть то самое, которое составляется из ребер обоих углов.

Теорема 10. *Сумма смежных по ребру тригоноэдров равна двугранному углу, коего ребро есть то самое, по коему смежны данные углы.*

В самом деле $O.ABE + O.ABF = EF.AB$; но $O.ABF = O.CDE$, как противоположный; следовательно, $O.ABE + O.CDE = EF.AB$.

1) Nebendreiecke; см. там же.

Следствие a. Прямой тригоноэдр измеряется 45°, так как сумма смежных по ребру двух таких углов равна 90°, а они, как прямые, равны между собою.

Это же следствие выводится одинаково и из определения 18 и примечания к нему. Для отличия прямого тригоноэдра от прямого плоского угла, мы будем означать первый буквою D; поэтому $D = 45° = \frac{d}{2}$.

Следствие b. Сумма гоноэдров, расположенных около одной точки, равна $8D = 360°$.

Следствие c. Сумма гоноэдров, расположенных по одну сторону плоскости, равна $4D = 180°$.

Следствие d. Вертикальный тригоноэдр измеряется половиною плоского или, что все равно, двугранного, не прямого, угла. В самом деле, сумма его со смежным ему по грани равна a, если через a означим его плоский или двугранный, не прямой, угол; но так как оба эти угла равны между собою, ибо могут быть совмещены, то каждый из них равен $\frac{a}{2}$.

Следствие e. Гоноэдр измеряется половиной площади соответствующего ему сферического многоугольника. В самом деле, сумма всех гоноэдров около одной точки будет соответствовать всей сфере и равна $8D = 4d = 2\pi$. Площадь же всей сферы равна $4\pi 1^2 = 4\pi$.

Определение 19. Гоноэдр, измеряющийся больше чем 45°, называется тупым, а меньше — острым.

Определение 20. Если все двугранные углы гоноэдра больше $2d$, то он называется вогнутым; если же одни углы больше, а другие меньше чем $2d$, то он называется выпукловогнутым.

Определение 21. Конический угол есть предел гоноэдра, коего число ребер возрастает безгранично; конический угол будет выпуклый, вогнутый или выпукловогнутый, смотря по тому, каков будет гоноэдр, которому сам конический угол служит пределом.

Примечание. Очевидно, что величина гоноэдра служит непосредственною мерою его телесной остроты или тупости, конечно при том условии, если мы ограничимся величинами $0—2d$. Плоскость, представляющая собою гоноэдр, имеющий последнюю величину, есть угол абсолютно тупой и представляет предел телесной тупости. Предел же остроты или угол, равный 0, есть прямая линия. Не должно упускать из виду, что измерению в смысле телесной тупости или остроты подлежат только те телесные углы, которые по всей своей величине находятся по одну сторону плоскости, проходящей через их вершину.

§ 7. Две параллельные плоскости H и H', пересекаемые двумя другими U и W (фиг. 8), определяют шестнадцать тригоноэдров, имеющих соотношение друг к другу.

Определение 22. Соответственными тригоноэдрами называются такие, которых ребра параллельны и направлены в одну и ту же сторону; например $O.ABE$ и $O'.A'B'E'$. Из них один $O.ABE$ будет внутренний, а другой $O'.A'B'E'$ внешний.

Определение 23. Накрестлежащими тригоноэдрами называются такие, которых ребра параллельны, но направлены в противоположную сторону; например $O.ABE$ и $O'.C'D'F$ будут внутренними, а $O.ABF$ и $O'.C'D'E'$ — внешними накрестлежащими тригоноэдрами.

Определение 24. Противолежащими тригоноэдрами называются такие, которых ребра параллельны, и притом те два из них, которые лежат в параллельных плоскостях, направлены в одну, а третьи — в противоположную сторону; например $O.ABE$ и $O'.A'B'F$ будут внутренними, а $O.BCF$ и $O'.B'C'E'$ внешними противолежащими тригоноэдрами.

Определение 25. Соответственно, косолежащими тригоноэдрами называются два таких угла, из которых один внутренний, а другой внешний, которых два ребра, лежащие

в параллельных плоскостях, имеют противоположное, а третьи — одинаковое направление; например $O.ABE'$ и $O'.C'B'E'$ будут соответственно косолежащими.

Определение 26. Два тригоноэдра, не удовлетворяющие ни одному из вышеозначенных условий, будем называть просто косолежащими, точно означая их взаимное положение; например $O.ABE$ и $O'.B'C'E'$ будут внутренний и внешний косолежащие углы по отношению к плоскости U, а $O.ABE$ и $O'.A'D'F$ — внутренние косолежащие углы по отношению к плоскости W.

Теорема 11. *Соответственные тригоноэдры равны между собою.*

В самом деле, из их определения (22) выходит, что все их плоские углы равны между собою и части расположены в одинаковой последовательности.

Теорема 12. *Накрестлежащие тригоноэдры симметричны.*

Легко видеть, в самом деле, что соответственный одному из таких есть противоположный другому; но соответственные углы равны, а противоположные симметричны.

Следствие. Из теоремы 11 следует, что сумма внутренних углов параллелепипеда равна 360°, так как, продолжив при одной из вершин все три плоскости, получим восемь тригоноэдров, соответственных углам параллелепипеда, сумма которых, как лежащих около одной точки, равна 360°. Сумма эта распадается на две части, причем углы одной противоположны углам другой. Это следует также и из теоремы 12, так как для каждого угла параллелепипеда имеется в нем же другой накрестлежащий.

Теорема 13. *Сумма противолежащих тригоноэдров равна двугранному углу, имеющему ребром прямую пересечения двух секущих плоскостей, а гранями — те две грани данных углов, которые сливаются друг с другом.*

Для доказательства заменим один из данных углов ему соответственным. Тогда полученные два угла будут смеж-

ными по грани, совпадающей с одной из параллельных плоскостей, а ребра, противолежащие этой грани, составят одну прямую, а именно прямую пересечения секущих плоскостей.

Теорема 14. *Сумма соответственно косолежащих тригоноэдров равна двугранному углу, коего ребро есть прямая пересечения секущих плоскостей, а грани — те две из граней данных углов, которые сливаются в одну плоскость.*

Для доказательства стоит только заменить один из углов ему противоположным, а следовательно, равномерным; тогда получим два противолежащих угла.

Теорема 15. *Сумма внутренних косолежащих тригоноэдров по отношению к плоскости U (фиг. 8) равна сумме внешних косолежащих по отношению к той же плоскости, равна сумме внутреннего и внешнего косолежащих углов по отношению к другой секущей плоскости W и равна двугранному углу, коего ребро есть прямая пересечения одной из параллельных плоскостей с плоскостью U, а грани — та часть одной из параллельных и та часть секущей плоскости U, в которых лежат соответствующие плоские углы одного из данных.*

Первую часть теоремы мы докажем, если последовательно заменим каждый из данных углов ему противоположным. Например, пусть даны два угла $O.ABF$ и $O.'B'C'E'$. Мы пишем $O'.B'C'E' = O'.A'D'F$; следовательно: $O.ABF + O'.B'C'E' = O.ABF + O.'A'D'F$; далее: $O.ABF = O.CDE$, следовательно: $O.ABF + O'.A'D'F = O.CDE + O'.A'D'F$.

Для доказательства второй половины теоремы заменим $O'.B'C'E'$ через $O.ADF$. Получаем $O.ABF + O.ADF = BD.AF = O.ABF + O'.B'C'E'$, что и требовалось доказать.

Примечание. Изучая теоремы 11—15 с другой точки зрения, принимая именно в соображение относительное направление ребер, мы увидим, что все эти теоремы можно сформулировать таким образом: тригоноэдры равны или равномерны, если все их параллельные ребра направлены

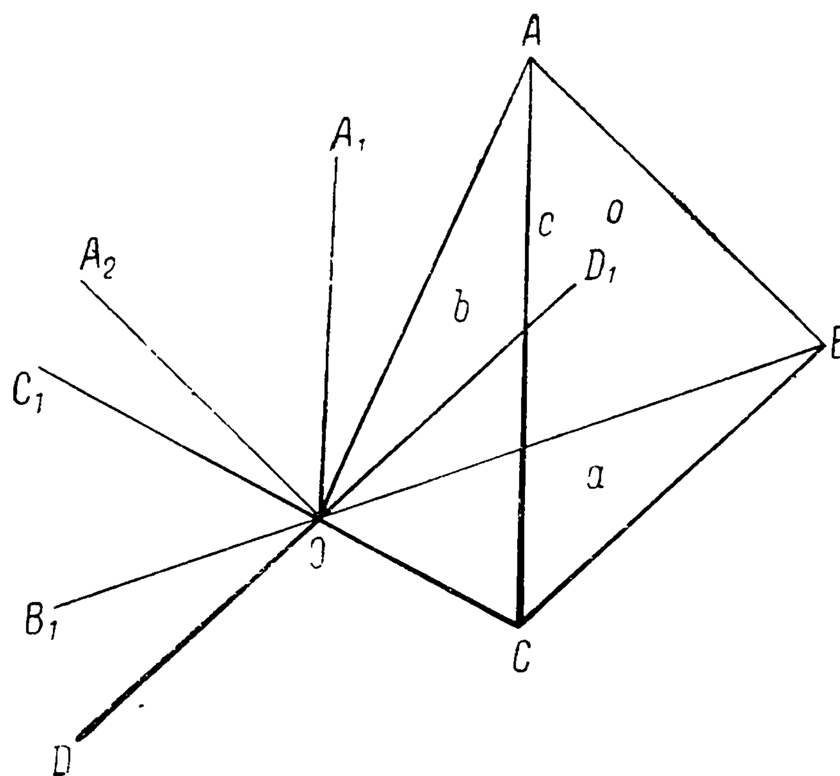
в одну или все в противоположную сторону. Если же два из них направлены в одну, а третьи в противоположные стороны или если два из них направлены в противоположные стороны, а третьи в одну, то сумма двух таких углов равна двугранному, коего ребро то самое, которое имеет направление по одиночному закону.

Глава 2

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ ГОНОЭДРОВ И КОНИЧЕСКИХ УГЛОВ

§ 8. Теорема 16. *Тригоноэдр равен полусумме составляющих его двугранных углов без 90°.*

а) Вывод по одному способу (фиг. 9).



Фиг. 9.

Возьмем какой-нибудь четырехгранник, заключающий данный угол $O.ABC$. Продолжим грань OBC и в ней прямые OC и OB и проведем $DD_1 \parallel BC$, $OA_1 \parallel CA$ и $OA_2 \parallel BA$. Около точки O по одну сторону плоскости BB_1CC_1 получаем сле-

дующие гоноэдры: $O.B_1C_1A_1A_2$ и данный $O.ABC$, $O.B_1DA_2$ и $O.BD_1A_1A$, $O.D_1C_1A_1$ и $O.DCAA_2$ и наконец $O.AA_1A_2$. Первая пара, сложенная с $O.A_1A_2A$, дает двугранный угол $OA.BC$; вторая, сложенная с тем же углом, дает $OA_2.B_1D$; наконец третья, сложенная с ним же, дает $OA_1.C_1D_1$. Но $O.AA_1A_2 = A$, как внутренние накрестлежащие; двугранный угол $OA_2.B_1D = AB$, как соответственному, и $OA.C_1D_1 = AC$ по той же причине; поэтому получаем $2d = AO - A + AB - A + AC - A + A$, откуда $A = \frac{AO + AB + AC}{2} - 90°$, что и требовалось вывести.

b) Вывод по второму способу (фиг 2).

$O.ABC + O.ABC_1 = CC_1$; $O.ABC + O.AB_1C = BB_1$; $O.ABC + O.A_1BC = AA_1$. Сложив, получаем $O.ABC + O.ABC_1 + O.AB_1C + O.A_1BC + 2O.ABC = CC_1 + BB_1 + AA_1$; далее $O.BCA_1 = OB_1C_1A$, как противоположному, и $O.ABC + O.ABC_1 + O.AB_1C + O.AB_1C_1 = 2d$, как сумма углов, лежащих около одной точки и расположенных по одну сторону плоскости BB_1CC_1. Итак, $2d + 2 \cdot O = AA_1 + BB_1 + CC_1$, или $O = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{2} - 90°$.

Следствие. Для прямого угла имеем

$$A = \frac{270}{2} - 90 = 45,$$

результат уже нам известный;[12] для вертикального угла получим

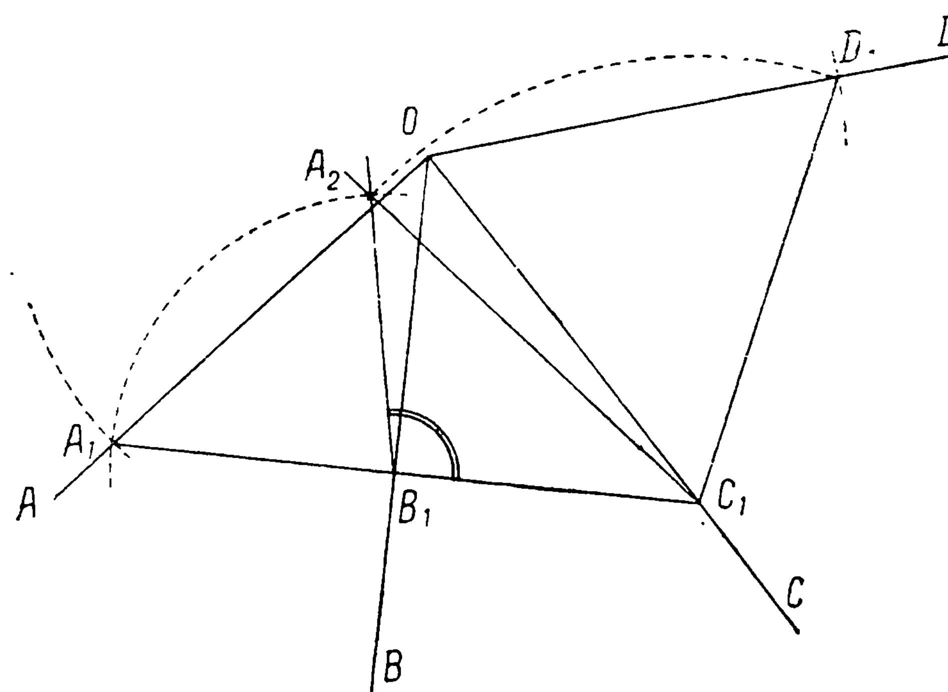
$$A = \frac{B + 180}{2} - 90 = \frac{B}{2},$$

результат также известный;[13] для прямоугольного угла получим

$$A = \frac{B + C + 90}{2} - 90 = \frac{B + C}{2} - 45;$$

для правильного угла получим $A = \frac{3B}{2} - 90$, а для равнобедренного $A = \frac{2B + C}{2} - 90 = B - \frac{2d - C}{2}$.

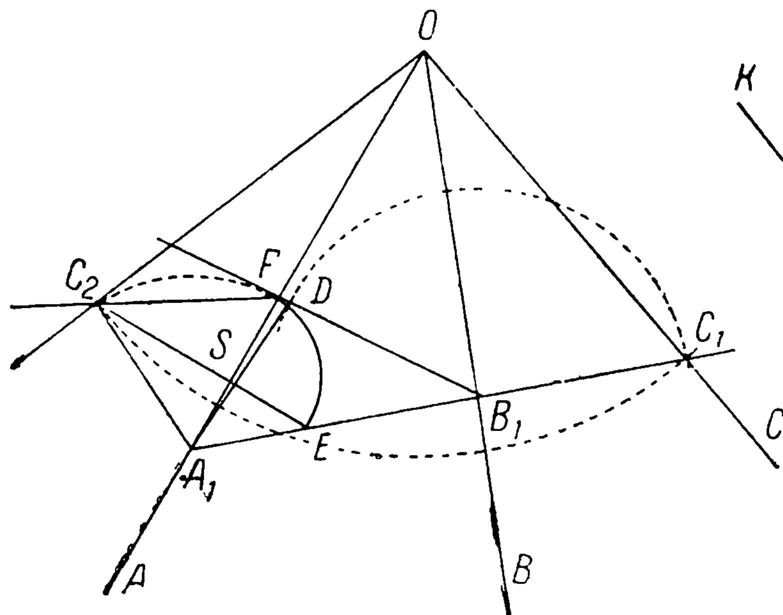
§ 9. Таким образом, величина тригоноэдра определяется весьма просто, если известны его двугранные углы. Но так как тригоноэдр может быть задан не только двугранными углами, но и другими частями, то вопрос об его определении сводится к определению его двугранных углов. Рассмотрим те случаи, когда тригоноэдр задается плоскими и двугранными углами. Здесь мы можем различать 6 случаев: 1) даны три плоских, 2) даны два плоских и двугранный между ними, 3) даны два плоских и двугранный против одного из них, 4) даны два двугранных и плоский против одного из них, 5) даны два двугранных и плоский между ними, и наконец 6) даны три двугранных угла. Последний случай уже разрешен. Перейдем к другим.



Фиг. 10.

Первый случай (фиг. 10). Даны три плоских угла AOB, BOC и COD. Определим двугранный угол OB. Проведем $A_1C_1 \perp OB$. Если бы через точку B_1 мы провели плоскость, перпендикулярную к ребру OB, то она пересекла бы грани AOB и BOC по прямым A_1B_1 и B_1C_1. Отложив $OD_1 = OA_1$ и соединив D_1 с C_1 прямою, получим, что C_1D_1 есть третья прямая пересечения гоноэдра с вспомогательной плоскостью. Построив по трем прямым A_1B_1, B_1C_1 и C_1D_1 трехугольник $B_1A_2C_1$, получим искомый угол $A_2B_1C_1$. Таким же образом легко построим и два других двугранных угла.

Второй случай (фиг. 11). Даны два плоских угла AOB, BOC и двугранный между ними KLM. Проводим $A_1C_1 \perp OB$. При B_1 строим угол $DB_1A_1 = KLM$ и откладываем $B_1D = B_1C_1$.

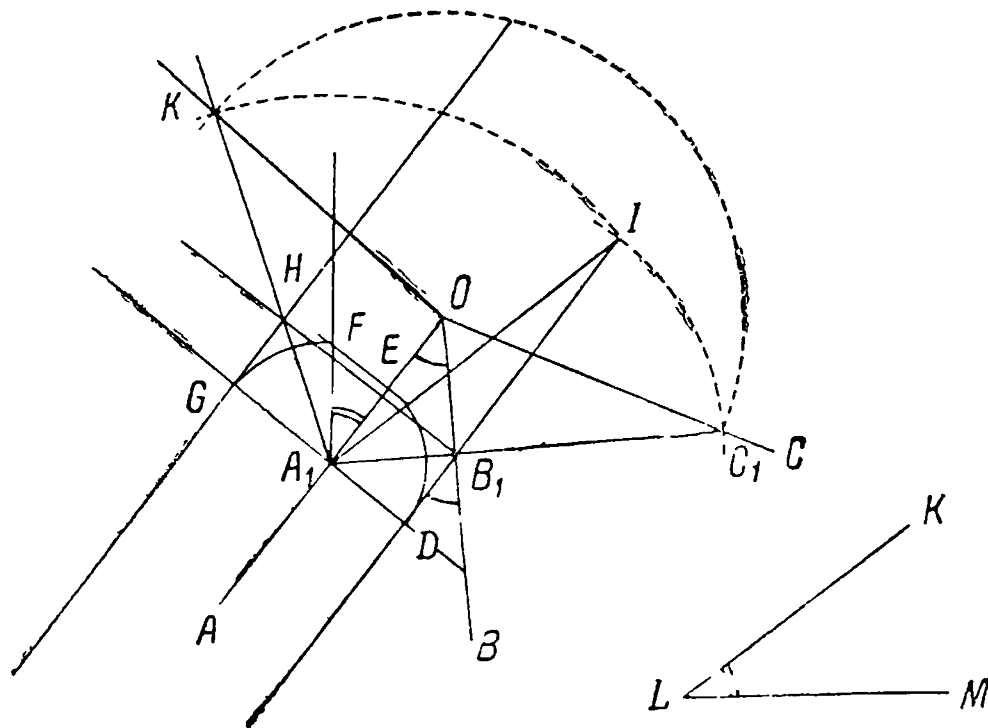


Фиг. 11.

Построив трехугольник из OA_1, $A_1C_2 = A_1D$ и $OC_2 = OC_1$, получим третий плоский угол A_1OC_2 нашего тригоноэдра. Следовательно, задача приводится к предыдущей. Впрочем, на том же чертеже легко получить двугранный [угол] OA; стоит только из C_2 опустить на OA перпендикуляр C_2E, отложить $SF = SE$ и соединить F с C_2; угол AFC_2 и будет искомый.

Третий случай (фиг. 12). Даны два плоских угла AOB и BOC и двугранный KLM, противолежащий углу BOC.

Проводим $A_1C_1 \perp OB$, $A_1D \perp OA$ и $B_1D \parallel OA$. Откладываем $A_1E = A_1D$. Строим угол $FA_1O = KLM$. Проводим $EF \perp AO$ и откладываем $A_1G = A_1F$. Прямая GH, параллельная AO, будет та линия, которая проведена на неизвестной третьей грани параллельно AO и которая проектируется по линии B_1D, когда эта грань будет проведена к грани AOB (начерченной в плоскости фигуры) под данным углом, если мы обернем ее около AO, как около оси. Прямая, проектирующаяся по A_1B_1, по обращении грани назад располо-



Фиг. 12.

жится по прямой A_1H. Отложив $OK = OC_1$ и соединив O с K, получим третий плоский угол AOK; построив же трехугольник A_1IB_1 из A_1B_1, $A_1I = A_1K$ и $B_1I = B_1C_1$, получим угол A_1B_1I, равный одному из искомых двугранных углов, имеющему ребром прямую OB.

Примечание. Легко видеть, что приведенный способ построения невозможен, если один из данных или оба данных угла тупые; чтобы снова притти к тем же построениям, стоит заменить данный угол: в первом случае — смежным по грани, плоский угол которой — данный острый, а во втором — смежным по ребру между двумя данными гранями. При этом всегда можем притти к тому, что два плоских угла, между которыми определяется двугранный угол, будут острыми. В случае, если один из углов прямой, построение упрощается.

Четвертый случай. Этот случай приводится к предыдущему, если вместо данных углов взять их дополнения до $2d$, принять двугранные углы за плоские и плоский за двугранный. Получим соответствующие части дополнительного тригоноэдра. Определив все его плоские углы, стоит только взять дополнительные им до $2d$ и мы получим искомые двугранные.

Пятый случай. Точно таким же образом, как предыдущий к 3-му, этот случай приводится ко 2-му.

§ 10. Теорема 17. *Гоноэдр об n граней равен полусумме двугранных углов без $(n-2)\,d$.*

В самом деле, гоноэдр можно разложить на $n-2$ тригоноэдра, двугранные углы которых складываются при составлении гоноэдра. Поэтому, означив величину гоноэдра через G, получим $G = \frac{\Sigma B}{2} - (n-2)\,d$.

Примечание. Если из двух чисел m и n первое меньше второго на величину a, то ясно, что на m-гоноэдр можно смотреть, как на n-гоноэдр, в котором

имеется a двугранных углов, равных $2d$. В самом деле,

$$G=\frac{(\Sigma B)-(n-2)\,2d}{2}=\frac{(\Sigma B+a\cdot 2d)-(n-2)2d}{2}=$$

$$=\frac{\Sigma B}{2}-(n-a-2)\,d=\frac{\Sigma B}{2}-(m-2)\,d.$$

Плоскость есть гоноэдр, все углы которого равны $2d$, а именно $G=\frac{n\cdot 2d}{2}-(n-2)\,d=2d$, что уже нам известно.

Теорема 18. *Гоноэдр равен дополнению до $2d$ полусуммы плоских углов дополнительного гоноэдра.*[1]

Означив сумму плоских углов дополнительного чрез ΣP_d, получим

$$G=\frac{\Sigma B}{2}-(n-2)\,d=\frac{n\cdot 2d-\Sigma P_d}{2}-(n-2)\,d=2d-\frac{\Sigma P_d}{2}.$$

Следствие a. Сумма плоских углов гоноэдра, дополнительного плоскости, рассматриваемой как данный гоноэдр, равна 0, так как первый представляет в этом случае прямую линию, а потому $G=2d$.

Для прямого угла получим $G=2d-\frac{3d}{2}=\frac{d}{2}=D$.

Следствие b. Приложим эту теорему к выводу величины конических углов. Сумма плоских углов дополнительного конического угла есть не что иное, как тот плоский угол, который получится от развертывания поверхности на плоскость. Возьмем прямой конус A (фиг. 13) и вообразим себе его вписанным в шаре таким образом, чтобы его ось проходила чрез центр. Ясно, что если развернем поверхность конуса A_1, то и получим искомую величину ΣP_d. Из подобия трехугольников ADB и BDA_1 заключаем, что $\frac{AD}{AB}=\frac{BD}{BA_1}$, но если развернем поверхность конуса A_1, то получим угол $\frac{4dBD}{BA_1}$; следовательно, $\Sigma P_d=4d\frac{AD}{AB}$, т. е. если известен угол

[1] См.: Steiner. Sur le maximum et le minimum des figures. Crelle Journ., т. 24, стр. 104.

растворения конуса BAC и если, отложив $AB=r$, найдем отношение $\frac{h}{r}=\frac{AD}{AB}$, то отсюда легко определим и величину самого конического угла, а именно

$$K=2d-\frac{4d\frac{h}{r}}{2}=2d\left(1-\frac{h}{r}\right).$$

Следствие c. Прямой конический угол, вписанный в шаре и опирающийся на окружность большого круга, равен

Фиг. 13.

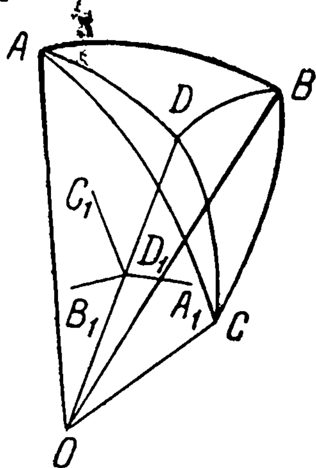
Фиг. 14.

$2d\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и, значит, меньше d, но несколько больше чем $\frac{d}{2}=D$.

Следствие d. Прямой конический угол, угол растворения коего равен 120°, равен $2d\left(1-\frac{1}{2}\right)=d$; значит, такой конический угол равен $2D$.

Следствие e. Если примем раз навсегда откладывать $r=1$, то для конического угла получим выражение $k=2d(1-h)$; возьмем другой угол $k_1=2d(1-h_1)$; их сумма $k+k_1=2d[2-(h+h_1)]$. Если сделаем $h+h_1=1$, то ясно, что $k+k_1=2d$. Итак, если дан коническй угол с углом растворения AOB (фиг. 14), нетрудно построить другой дополнительный ему до $2d$. Проведем окружность радиусом $OC=1$;

затем построим AOC, равное половине данного угла; из точки C проведем другую окружность того же радиуса и соединим точку K пересечения ее с перпендикуляром DEK к прямой OC с точкой C; тогда $OD = h$; $DC = h_1$ и $h + h_1 = OC = 1$. Итак, конический угол, угол растворения коего KCL, есть дополнительный до $2d$ данному. Проведя OB_1 и OA_1 параллельно CL и CK, получим тот же угол, построенный при центре; но так как дополнительный до $2d$ этому углу есть конический угол, ограниченный с одной стороны плоскостью GH, а с другой — конической поверхностью A_1OB_1, то, значит, этот конус равен данному AOB. Итак, каждый конический угол легко заменить другим, коего одна поверхность коническая, а другая — плоскость. Назовем такие углы плоскоконическими.



Фиг. 15.

§ 11. Теорема 19. *В каждом тригоноэдре можно вписать прямой конус.*

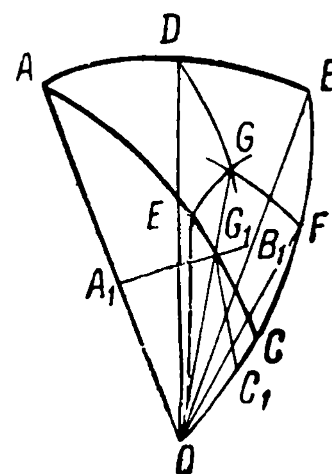
Положим, нам дан тригоноэдр $OABC$ (фиг. 15). Построим соответствующий сферический трехугольник ABC. Разделим два угла A и B пополам; получим точку D, которая будет соответствовать прямой OD. Последняя по способу построения будет обладать тем свойством, что перпендикуляры D_1A_1, D_1B_1 и D_1C_1, опущенные из произвольной ее точки на грани данного угла, будут равны между собой. Отсюда заключаем, что если проведем плоскость через OC и OD, то эта плоскость будет делить пополам угол OC. Если же опишем конус вращения около OD, как около оси, приняв прямую OA_1 или, что все равно, OB_1 или OC_1 за производящую, то ясно, что полученный конус будет касаться граней данного угла по прямым OA_1, OB_1 и OC_1, так как прямые эти образуют равные углы с его осью.

Примечание. Точка D пересечения оси вписанного конуса со сферою называется центром вписанного в сферическом трехугольнике ABC круга.

На основании этой теоремы легко непосредственно доказать равномерность двух симметричных тригоноэдров (по способу Дюрранда). В самом деле, оба симметричных тригоноэдра плоскостями, проходящими через ось вписанного конуса и перпендикулярными к его граням, разлагаются соответственно на три равные тетрагоноэдра. Отсюда легко перейти к доказательству равномерности всех вообще симметричных гоноэдров.

Теорема 20. *Около каждого тригоноэдра можно описать. конус вращения.*

Пусть дан тригоноэдр $OABC$ (фиг. 16). Разделим его плоские углы прямыми OD, OE[13'] и OF пополам. Через две из них, положим OD и OF, проведем плоскости ODG и OFG соответственно перпендикулярные к граням AOB и BOC. Эти плоскости пересекутся по прямой OG, которая по способу построения будет обладать тем свойством, что перпендикуляры G_1A_1, G_1B_1 и G_1C_1, опущенные из произвольной ее точки G_1 на ребра данного угла, будут равны между собой. Отсюда заключаем, что если через OG и OE проведем плоскость, то она будет перпендикулярна к грани AOC. Если около OG, как около оси, опишем конус вращения, приняв OA за производящую, то описанная коническая поверхность будет заключать в себе также прямые OB и OC, вследствие равенства расстояний между точками этой оси и точками ребер, отмечаемыми плоскостью, перпендикулярною к оси.



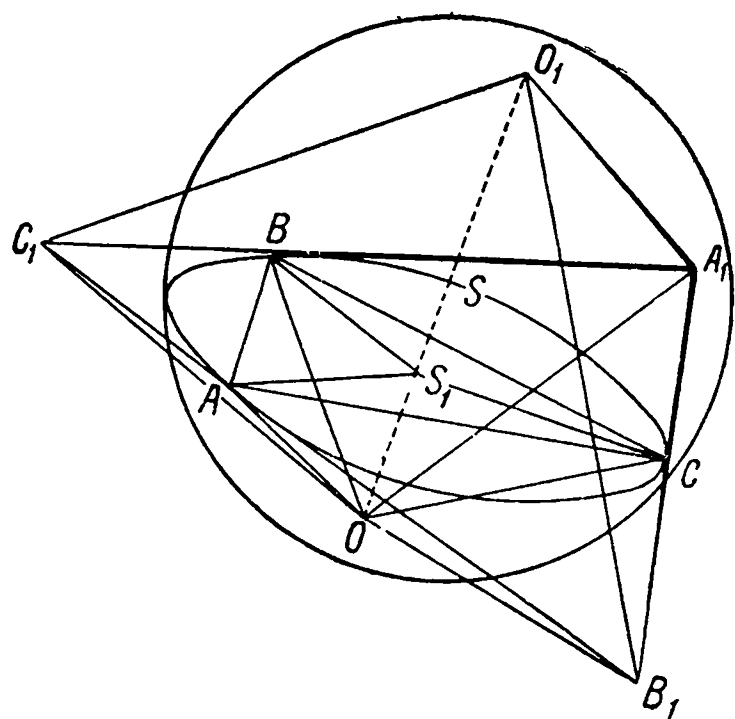
Фиг. 16.

Примечание. Точка G пересечения оси OG со сферою называется центром круга, описанного около сферического трехугольника ABC.

Ясно, что центры кругов, вписанного и описанного около сферического трехугольника как точки, лежащие на сфере, отличаются от действительных центров тех же кругов, лежащих в их плоскости.

Теорема 21. *Конический угол, дополнительный вписанному в тригоноэдре, есть описанный около дополнительного тригоноэдра, и обратно, конический угол, дополнительный описанному около тригоноэдра, есть угол, вписанный в дополнительном.*

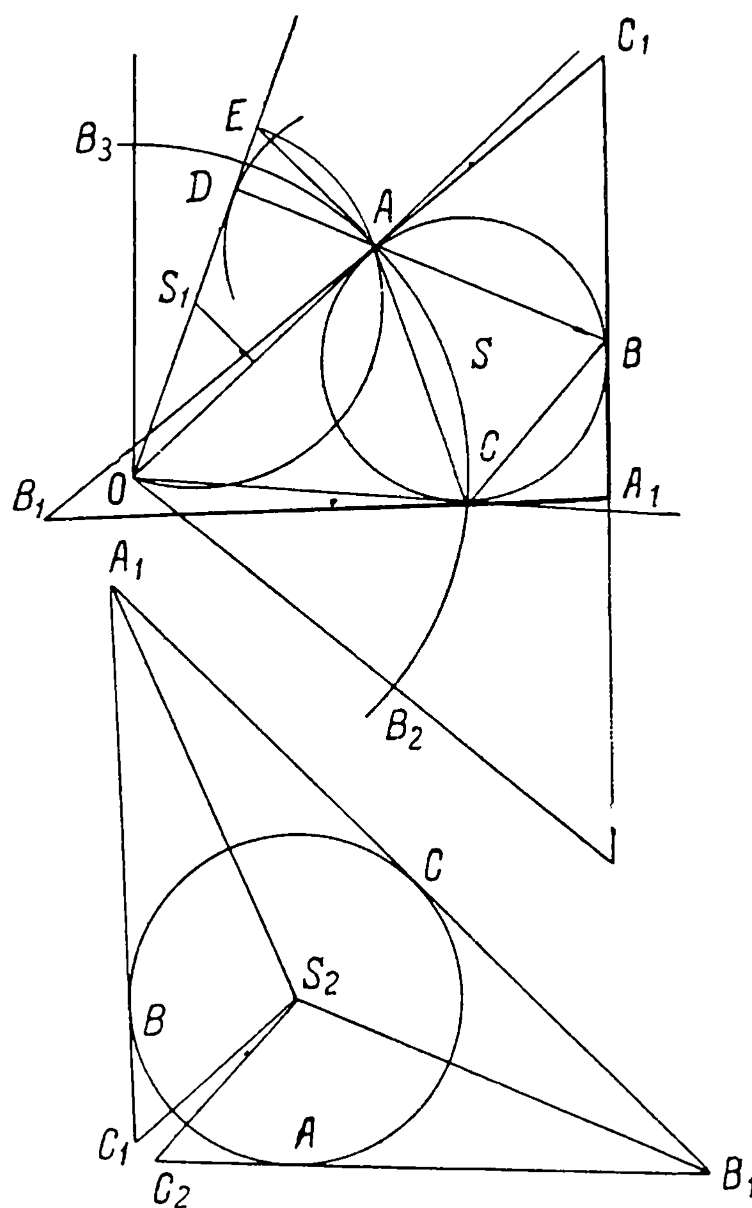
Пусть нам дан тригоноэдр $OABC$ (фиг. 17). Отложим на ребрах его равные части OA, OB и OC и через точки O, A, B и C проведем шаровую поверхность. Ясно, что окружность ABC сечения шара с плоскостью, проходящей через точки A, B и C, будет принадлежать конической поверхности, описанной около данного тригоноэдра. Чтобы построить дополнительный тригоноэдр, проведем через точки A, B и C плоскости, перпендикулярные к ребрам OA, OB и OC. Все эти три плоскости должны проходить через точку O_1, диаметрально противоположную точке O, так как прямые $O_1 A$, O_1B и O_1C (не проводим, чтобы не усложнять чертежа) должны быть перпендикулярны к OA, OB и OC и, следовательно, углы OAO_1, OBO_1 и OCO_1 должны опираться на концы диаметра большого круга. Поэтому точка O_1 будет вершиною гоноэдра, дополнительного данному. Далее: так как грани этого угла должны быть перпендикулярны к ребрам OA, OB и OC, то они будут также перпендикулярны и к плоскостям OAO_1, OBO_1 и OCO_1; а так как эти последние плоскости проходят чрез прямую OO_1, перпендикулярную к плоскости ABC, то они будут перпендикулярны и к прямым B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, т. е. прямым пересечения граней дополнительного угла с плоскостью ABC; следовательно, AS_1[1] $\perp B_1C_1$,



Фиг. 17.

[1] S_1 — центр окружности ABC.

$BS_1 \perp A_1C_1$ и $CS_1 \perp A_1B_1$, а поэтому B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 — касательные к кругу ABC. Вследствие этого конус, коего вершина точка O_1, а направляющая — окружность ABC, будет вписанным в дополнительном гоноэдре $O_1A_1B_1C_1$. Доказательство тому, что конус, имеющий вершиною точку O_1, будет дополнительный конусу, имеющему вершиною точку O, то же, что и для самих гоноэдров, а именно, что вершины обоих конусов суть точки диаметрально противоположные, а общее основание есть окружность, лежащая на сфере и перпендикулярная к OO_1.



Фиг. 18.

Так же докажется и обратная часть теоремы.

Следствие а. Основываясь на этой теореме, нетрудно непосредственно и графически определить величину тригоноэдра по данным плоским [углам], не прибегая к отдельному построению каждого двугранного угла.

Пусть, например, даны плоские углы B_3OA, AOC и COB_2 (фиг. 18). Проведя из O дугу произвольным радиусом AO, построим трехугольник ABC по хордам AB_3, AC и CB_2; этот трехугольник соответствует ABC на фиг. 17. Построив в точках A, B и C касательные к описанному кругу, получим трехугольник $A_1B_1C_1$, соответствующий $A_1B_1C_1$ на фиг. 17, описанному около того же круга. Затем проведем из точки A (фиг. 18) дугу радиусом AS и к ней из точки O касательную OD. Восставив из средины AO перпендикуляр, получим центр большого круга, имеющего радиусом S_1O. Соединив

A с E, получим перпендикуляр AE, проведенный из вершины дополнительного угла на касательные к окружности ABC. Проведя отдельно окружность радиусом, равным AE, и построив касательные C_1A_1, A_1B_1 и B_1C_2, равные касательным на общей фигуре, получим плоские углы дополнительного гоноэдра $C_1S_2A_1$, $A_1S_2B_1$ и $B_1S_2C_2$. Разделив угол $C_1S_2C_2$ пополам, непосредственно получаем искомую величину данного гоноэдра, обходя построение двугранных углов. В самом деле, $G = \frac{\Sigma B}{2} - 90$, но $\Sigma B = 6d - \Sigma Pd$, следовательно $2G = 4d - \Sigma Pd$ или $G = \frac{4d - \Sigma Pd}{2}$ (теорема 18).

Следствие b. Совершенно подобным же образом найдем величину правильного гоноэдра с каким угодно числом граней. Разница будет состоять только в том, что вместо трехугольника мы получим правильный многоугольник.

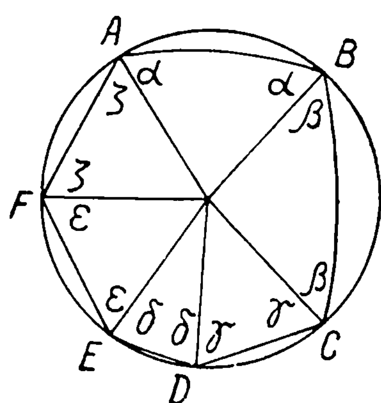
Следствие c. Вообще, какой бы нам ни был дан гоноэдр, разложив его на тригоноэдры и найдя, по указанным выше способам, величины каждого из них, и затем сложив полученные величины, найдем искомую величину данного гоноэдра.

Следствие d. Задачи по разделению гоноэдров на равномерные части, по замене одних другими, им равномерными, но удовлетворяющими заданным условиям, разрешаются легко при посредстве дополнительных гоноэдров. Если, изменяя величины отдельных плоских углов дополнительных гоноэдров, мы оставим неприкосновенною их сумму, то и величины гоноэдров, им соответствующие, остаются неизменными. Ясно, например, что, разделив эту сумму на три равные части и построив соответствующий тригоноэдр, мы заменим данный другим, имеющим ту же величину, но правильным; разделив эту сумму на два прямых и остаточный угол, мы построим вертикальный угол, равный данному, и т. д.

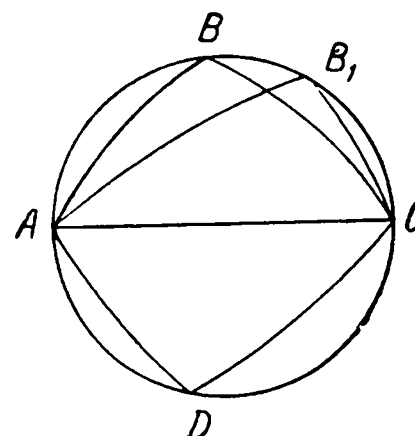
Следствие e. Ясно, что ход доказательства не изменится, если вместо тригоноэдра мы возьмем какой-нибудь

другой гоноэдр, около которого мы можем описать конус. Поэтому, вообще конический угол, дополнительный описанному около данного гоноэдра, есть угол, вписанный в дополнительный гоноэдр, и обратно, конический угол, дополнительный вписанному в данный гоноэдр, есть угол, описанный около дополнительного.

Теорема 22. *Если мы перенумеруем в какой-нибудь последовательности вершины сферического многоугольника, вписанного в круге и имеющего четное наименование, то получим, что суммы углов, лежащих при четных и при нечетных вершинах, равны между собой.*[1])



Фиг. 19.



Фиг. 20.

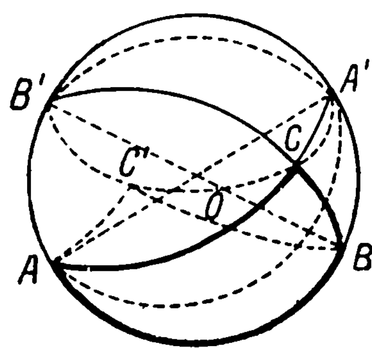
В самом деле, если 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... представляют собою сферический многоугольник, вписанный в круге, и если число вершин его четное, то, соединив все его вершины с центром, мы разобьем его площадь на равнобедренные сферические трехугольники и получим (фиг. 19) $B=\alpha+\beta$, $C=\beta+\gamma$, $D=\gamma+\delta, \ldots$ или $A+C+E+\ldots=B+D+$ $+F+\ldots=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+\ldots$

Следствие a. В частном случае, для сферического четырехугольника $ABCD$ (фиг. 20) мы получим $A+C=B+D$. Соединим A с C дугою большого круга; тогда, как бы ни изменялось положение одной из вершин B в пределах от A до C, всегда написанное равенство будет иметь место, но

[1]) См.: Steiner. Verwandlung und Theilung sphärischer Figuren duch Construction. Crelle Journ., т. 2, стр. 47 и сл.

так как при этом углы D, CAD и ACD остаются постоянными, то, следовательно, при постоянном положении точек A и C будет постоянно иметь место равенство $B_1AC + B_1CA = AB_1C$,[14] т. е. у всех тригоноэдров, имеющих общую грань и вписанных в одном и том же конусе, сумма двугранных углов, прилежащих данному плоскому без третьего двугранного угла, есть величина постоянная.

Следствие b. Если в сферических треугольниках (фиг. 21) $A'B'C$ мы примем сторону $A'B'$ постоянной, а вершину C произвольной, но находящейся на некотором малом круге, проходящем через вершины A' и B', то получим $A' + B' - C = k$, где k — некоторая постоянная величина. Построив точки A и B, диаметрально противоположные точкам A' и B', получим для трехугольника $ABC: A = 2d - A'$, $B = 2d - B'$ и C равным одноименному с ним углу трехугольника $A'B'C$; поэтому $2d - A + 2d - B - C = k$ или $A + B + C = 4d - k$ и, значит, сумма $A + B + C$ есть величина постоянная, т. е. трехугольник ABC имеет постоянную площадь. Отсюда следует, что все сферические трехугольники с одной и той же стороной AB имеют постоянную площадь, если их вершина C находится на малом круге, проходящем через точки A' и B', диаметрально противоположные его вершинам A и B.



Фиг. 21.

Следствие это носит название теоремы Лекселя[1]) по имени геометра, выведшего ее в первый раз (1781) аналитическим путем.

Следствие c. Из соотношения полярных сферических многоугольников легко вывести следующие заключения:

Если мы перенумеруем в какой-нибудь последовательности стороны сферического многоугольника, описанного около

---

1) См.: Lexell. Acta Petrop., I, стр. 112, 1781. Затем теорема эта была выведена другими математиками более простым путем. В тексте употреблен способ Штейнера.

круга и имеющего четное наименование, то получим, что суммы сторон, лежащих при четных и нечетных точках касания, равны между собою, что во всех сферических треугольниках, имеющих постоянный угол и постоянную сумму сторон, сторона, противоположная данному углу, касается малого круга, проходящего через точки, диаметрально противоположные точкам касания двух других сторон.

ОТДЕЛ
II

ФИГУРЫ СОМКНУТЫЕ



Глава 3

СФЕНОИДЫ И ТЕТРАЭДР[15]

§ 12. Определение 1. Сфеноидом называется часть пространства, ограниченная четырьмя не пересекающимися в одной точке плоскостями.

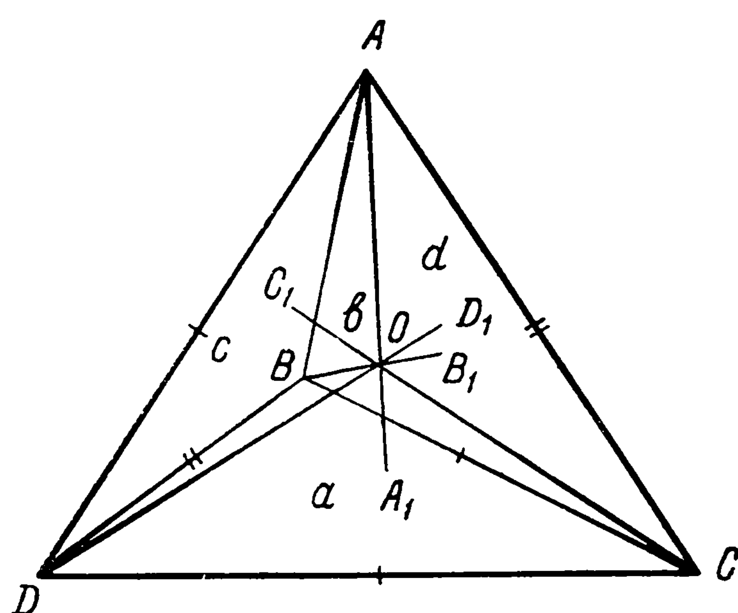
Следствие. Легко видеть, что грани этой фигуры будут трехугольники, что каждой грани противолежит вершина тригоноэдра, что пересечение граней образует 6 ребер, которые будут ребрами двугранных углов. Примем для простоты означать вершины сфеноида буквами A, B, C и D, противоположные грани — буквами a, b, c и d, а двугранные углы — буквами ab, ac, ad, bc, bd и cd.

Определение 2. Постоянным или просто тетраэдром называется такой сфеноид, грани которого — правильные трехугольники.

Следствие. Из этого определения вытекает, что все гоноэдры тетраэдра будут правильные, все ребра равны, а также равны и все двугранные углы.

Примечание. Сфеноид играет в пространстве ту же роль, что трехугольник на плоскости; это самая простая из всех возможных фигур, и каждую телесную фигуру можно разбить на сфеноиды, так же как всякую плоскую фигуру можно разбить на трехугольники. В самом деле, чтобы разбить какую-угодно фигуру, ограниченную плоскими гранями, т. е. многогранник, на сфеноиды, стоит только

взять где-нибудь внутри многогранника точку и соединить ее со всеми его вершинами. Если бы многогранник имел вогнутые углы, то, разделив его плоскостями на такие части, чтобы каждая из них имела только выпуклые углы, мы можем каждую часть отдельно разбить на сфеноиды. На кривые же поверхности, ограничивающие фигуру, можно смотреть, как на предел суммы весьма малых плоских граней, и, значит, и на них, если они сомкнутые, мы можем распространить то же воззрение.



Фиг. 22.

Кроме тетраэдра, мы отличаем еще следующие разности сфеноида.

Определение 3. Равноугольным сфеноидом называется такой, все тригоноэдры которого равны между собой.

Определение 4. Равнобедренным сфеноидом называется такой, у которого равны между собой какие-нибудь четыре ребра, образующих сомкнутую ломанную.

Определение 5. Парногранным сфеноидом называется такой, у которого только две пары противолежащих ребер соответственно равны между собой.

Примечание. Ясно, что у такого сфеноида две грани, имеющие общее, непарное, ребро, равны друг другу; в самом деле, если $AD=BC$ и $AC=BD$ (фиг. 22), то в трехугольниках ABD и ABC все стороны соответственно равны друг другу, а следовательно, и сами трехугольники равны. По той же причине $\triangle ACD=\triangle BCD$.

Теорема 1. *Сумма тригоноэдров сфеноида равна сумме двугранных углов без $4d$.*[1])

[1]) Эта теорема нередко была предметом вывода (например см.: Grunert. Einige stereometrische Sätze. Crelle Journ., т. 5, стр. 39.

Мы имеем [16]

$$A = \frac{bc + bd + cd}{2} - d;$$

$$B = \frac{ac + ad + cd}{2} - d;$$

$$C = \frac{ab + ad + bd}{2} - d;$$

$$D = \frac{ab + ac + bc}{2} - d;$$

сложив, прямо получаем $A + B + C + D = ab + ac + ad + bc + bd + cd - 4d$.

§ 13. Определение 6. Внешним углом 1-го рода сфеноида называется тригоноэдр, две грани которого суть две из граней сфеноида, а третья — продолженная третья грань при той же вершине.

Определение 7. Внешним углом 2-го рода сфеноида называется тот тригоноэдр, одна грань которого есть одна из граней сфеноида, а две другие — продолженные его грани при той же вершине.

Примечание. Из этого определения видно, что для того, чтобы получить этот угол, нужно продолжить одно из ребер сфеноида.

Теорема 2. *Внешний угол 1-го рода сфеноида равен сумме внутренних с ним несмежных двугранных углов без суммы внутренних с ним несмежных гоноэдров.*

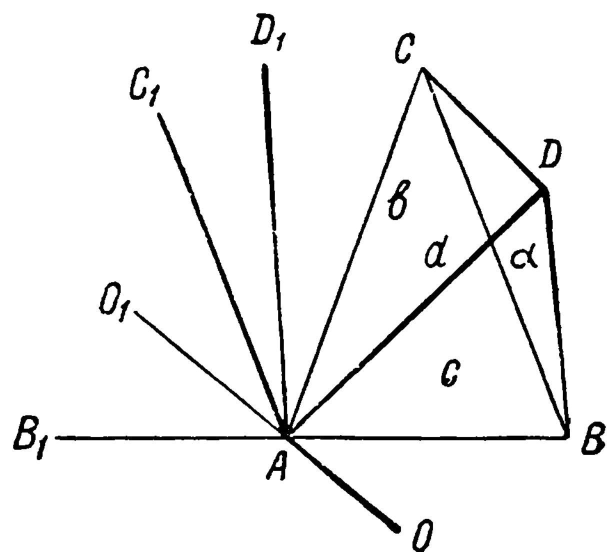
В самом деле, внешний угол при вершине O (фиг. 9) [17] состоит из двугранного угла $DD_1.B_1A_2$, [18] из $O.AA_1A_2$, $O.CDA_2A$ и $O.BD_1A_1A$; но $DD_1.B_1A_1 = ao$, как соответственному; $O.CDA_2A = O.A_1CD - O.AA_1A_2$; $O.BD_1A_1A = O.BA_2D_1 - O.AA_1A_2$. Далее, $O.A_1CD = ob - C$, как внутренние косолежащие углы по отношению к плоскости AOC;

Бугаев. Теорема Эйлера о многогранниках. Мат. сб., т. 2, 1867), но она представляет собой лишь частный случай общей теоремы, о которой речь будет дальше.

$O.BA_2D_1 = oc - B$, по подобной же причине, а $O.AA_2A_2 = A$, как внутренние накрестлежащие. Введя эти условия, получим $O_e = ao + A + ob - C - A + oc - B - A = (ao + bo + co) - - (A + B + C)$.

Теорема 3. *Внешний угол 2-го рода сфеноида равен сумме гоноэдра, имеющего с ним общее ребро, и двугранного угла, ребро которого противоположно этому ребру, без суммы двух других, с ним не смежных гоноэдров.*

Назвав искомый внешний угол через A_e, получим (фиг. 23) $A_e = A.B_1C_1D_1 + A.CDD_1C_1$;[19] но $A.B_1C_1D_1 = B$, как соответственные, $A.CDD_1C_1 = = OO.CC_1 - A.OCC_1 - A.O_1DD_1 = = ab - C - D$. Следовательно, $A_e = = ab + B - (C + D)$.



Фиг. 23.

Следствие a. Так как $A_e = cd - A$, то $cd - A = ab + B - - (C + D)$, или $cd - ab = A + B - - (C + D)$, т. е. разность двух двугранных углов, имеющих противолежащие ребра, равна разности сумм соответствующих прилежащих тригоноэдров.

Следствие b. Так как теорема 3 одинаково прилагается ко всякому внешнему углу второго рода, независимо от того, какое ребро мы продолжаем, то можем написать следующие три равенства, относящиеся к таким внешним углам, прилежащим к гоноэдру A, а именно:

$$cd - A = ab + B - (C + D);$$

$$bd - A = ac + C - (B + D);$$

$$bc - A = ad + D - (B + C).$$

Складывая их попарно и сокращая, получим другие три равенства:

$$D-A=\frac{ab+ac}{2}-\frac{bd+cd}{2};$$

$$C-A=\frac{ab+ad}{2}-\frac{bc+cd}{2};$$

$$B-A=\frac{ac+ad}{2}-\frac{bc+bd}{2}.$$

Ясно, что таких равенств мы можем написать 12.

Следствие с. Если все тригоноэдры в сфеноиде равны, то равны и противолежащие двугранные углы, что прямо вытекает из первых трех формул следствия b.

§ 14. Теорема 4. *Сумма внутренних гоноэдров сфеноида заключается между* O *и* $2d$.

Что сумма геноэдров меньше $2d$, видно из следующего (фиг. 9): $2d = O.B_1DA_2 + O.C_1D_1A_1 + O.AA_1A_2 + O.ABC + O.B_1C_1A_1A_2 + O.BD_1A_1A + O.CDA_2A = B + C + A + O +$ три тетрагоноэдра; значит, только $A + B + C + O < 2d$. Однако сумму внутренних гоноэдров можно сделать меньше $2d$ на величину, меньшую всякой данной. В самом деле, предположим, что точку A будем безгранично приближать к грани OBC, пока не приблизим на величину, меньшую всякой данной; ясно тогда, что сумма двугранных углов при A будет отличаться от $6d$ на бесконечно малую величину, а следовательно, один гоноэдр A удовлетворит уже поставленному условию, ибо $A = \frac{6d-\alpha}{2} - d = 2d - \frac{\alpha}{2}$;[20] сумма же остальных гоноэдров будет, конечно, $< \frac{\alpha}{2}$.

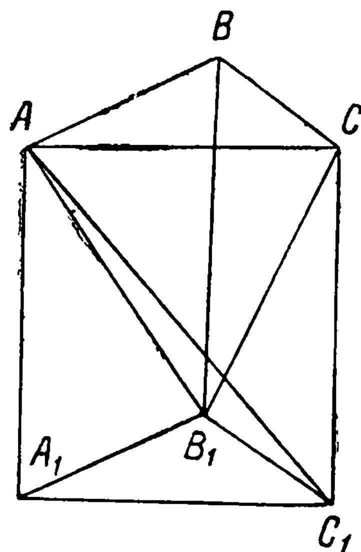
Что сумма гоноэдров сфеноида больше нуля, не требует доказательства; но можно доказать, что эту сумму можно сделать отличною от 0 на величину, меньшую всякой данной. Представим себе, что прямую трехгранную призму $ABCA_1B_1C_1$ (фиг. 24) мы разделим на три сфеноида и затем начнем ее вытягивать по вертикальным ребрам до неопределенно большей величины. Ясно, что по мере вытягивания прямые AC_1, AB_1 и CB_1 будут все больше и больше приближаться

к параллельности с вертикальными ребрами, а потому и самые сфеноиды $ABCB_1$ и $A_1B_1C_1A$ будут неопределенно приближаться к призмам, а их три угла при основании — к вертикальным. Поэтому сумму двугранных углов, образуемых вытягивающимися гранями сфеноидов, можно сделать отличною от $2d$ на величину, меньшую всякой данной, а так как рядом с этим двугранные углы, образуемые теми же гранями с основаниями сфеноидов, неопределенно приближаются к прямым, то сумма тригоноэдров при основаниях сфеноидов будет неопределенно приближаться к величине $S=3d+2d-4d=d$ (теорема 1), т. е. при обоих основаниях — к $2d$; а так как общая сумма гоноэдров призмы (как полупараллелепипеда) есть $2d$, то ясно, что при этом изменении призмы сумма гоноэдров сфеноида ACB_1C_1 приближается к нулю и может быть сделана отличной от него на величину, меньшую всякой данной.

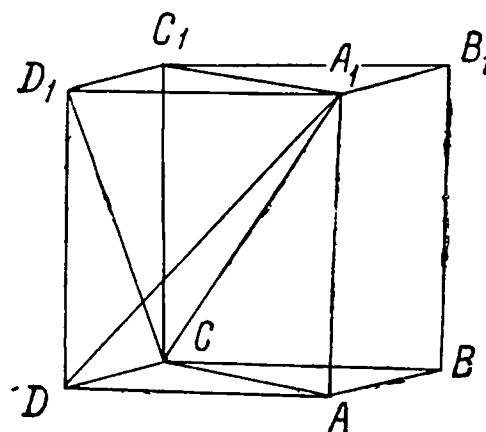
Примечание. Мы видим отсюда, что сумма внутренних телесных углов сфеноида не только не есть постоянная величина, но она есть величина, изменяющаяся в столь широких размерах, что разбивание многогранников на сфеноиды не может дать даже приблизительно понятия о сумме внутренних углов многогранника. Например, прилагая выведенную теорему к определению пределов суммы внутренних углов параллелепипеда, получим величину $O-20d$; на самом же деле величина эта, как мы знаем, $4d$. Так как каждый параллелепипед распадается на 6 сфеноидов, то можно принять за среднюю величину суммы углов последнего $\frac{2}{3}d=60^\circ$; однако и эта средняя величина редко может дать приблизительное понятие о сумме углов многогранника; к ней приближается сумма углов правильного тетраэдра, равная почти $62\frac{1}{2}^\circ$. Совершенно же точную величину дает сфеноид, образованный из куба. Возьмем, например, сфеноид $ACDA_1$ (фиг. 25); так как он равен A_1D_1CD, а также $A_1C_1D_1C$, то сумма углов каждого равна 60°; отсюда легко определим и величины других углов сфноида. В самом деле $A=D=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}^\circ$, как углы вертикальные, плоский не прямой угол которых равен 45°; так как $A_1=C$, то каждый из них равен $\frac{60-45}{2}=7\frac{1}{2}^\circ$. Так как два из

двугранных углов этих гоноэдров имеют величину 90 и 45°, то ясно, что третий равен 60°, т. е. $7\frac{1}{2} = \frac{90 + 60 + 45}{2} - 90$; и действительно, так как все три двугранных угла, имеющих ребро A_1C и заключающихся в полукубе $ACDA_1C_1D_1$, равны между собой, то каждый из них должен быть равен 60°.

Наконец, посредством разложения на сфеноиды можно составить себе приблизительное понятие о величине суммы гоноэдров многогранников с весьма большим числом граней, и притом вписанных в шаре или описанных около него, так как в этом случае сумму гоноэдров сфеноида можно принять за величину, весьма близкую к d, как это мы видели при выводе предыдущей теоремы.



Фиг. 24.



Фиг. 25.

Чтобы показать на примере полезность такого рода представления, мы приведем здесь доказательство Дюрранда[1]) о равномерности симметричных многогранников вообще. Очевидно, что два симметричных многогранника разлагаются на равное число симметричных сфеноидов, и, следовательно, остается доказать равномерность последних. Но если мы впишем в них шар (теорема 6), и, приняв центр последнего за вершину, разложим сфеноид на 12 четырехугольных пирамид таким образом, чтобы в каждой были две смежные по ребру части граней сфеноида, две другие проходили чрез прямую, соединяющую центр шара с вершиной, а основанием служила бы плоскость, проходящая через центр и перпендикулярная общему ребру первых двух граней, то, как легко убедиться, полученные таким образом элементы разложения будут не только симметричны, но и совместимы. Подобное же доказательство дано этой теореме и Гудерманном.[2])

---

[1]) Durrande, Ann. de Math. par Gergonne, т. 6, стр. 340.

[2]) Gudermann, Crelle Journ., т. 6, стр. 304.

§ 15. Теорема 5. *Каждый сфеноид можно вписать в шар: основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на грань сфеноида, есть центр описанного около грани круга.*

В самом деле, стоит только какие-нибудь три ребра, не находящиеся в одной плоскости, разделить пополам и чрез полученные точки провести плоскости, перпендикулярные к соответствующим ребрам, и мы получим точку пересечения этих трех плоскостей, одинаково отстоящую от всех четырех вершин сфеноида, т. е. центр описанного около сфеноида шара. Плоскости граней вписанного в шаре сфеноида пересекают шаровую поверхность по некоторым окружностям, проходящим через вершины трехугольной грани; а так как перпендикуляр, опущенный из центра шара на плоскость круга, проходит через его центр, то, следовательно, центр описанного около трехугольной грани круга и есть основание этого перпендикуляра.

Примечание. Если бы мы приняли центр шара за вершину конусов, описанных около тригоноэдров, которые получатся, когда соединим его с вершинами сфеноида, то ясно, что описанные около трехугольных граней окружности будут лежать на конических поверхностях, и, следовательно, центр описанного круга будет принадлежать оси такого конуса.

Теорема 6. *В каждый сфеноид можно вписать шар; прямая, проведенная из какой-либо вершины сфеноида через центр шара, есть ось конуса, вписанного в тригоноэдр, имеющий эту вершину.*

Мы уже знаем, что в каждый тригоноэдр можно вписать конус и что ось вписанного конуса обладает тем свойством, что каждая ее точка одинаково отстоит от всех трех граней данного угла. Теперь вообразим себе, что мы одновременно вписали конусы в тригоноэдры A и B (фиг. 22) и что прямые AA_1 и BB_1 есть оси этих конусов. Так как каждая из точек прямой AA_1 отстоит на одинаковое расстояние от гра-

ней ABC, ABD и ACD, то прямая AA_1 должна находиться в плоскости, делящей двугранный угол AB пополам. По той же причине, в той же плоскости должна лежать и прямая BB_1; следовательно, обе эти оси должны пересечься в какой-нибудь точке O, и притом расстояние этой точки от всех четырех граней сфеноида должно быть равно. Рассуждая подобным же образом относительно осей CC_1 и DD_1, мы увидим, что они также должны проходить через точку O; следовательно, оси вписанных конусов пересекаются все в одной точке, которая и есть центр вписанного в сфеноид шара, как точка, равноотстоящая от всех его граней.

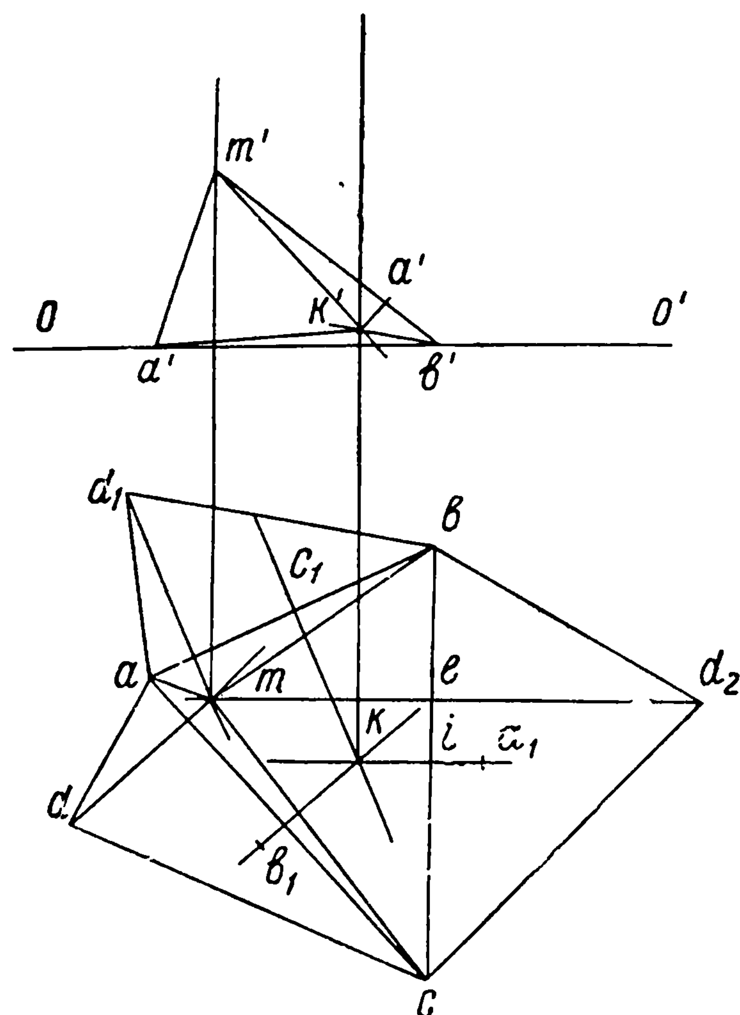
Примечание. Вообще говоря, основание [оси] вписанного конуса на противоположной грани не есть центр круга, вписанного в трехугольной грани; но ясно, что это будет иметь место, когда эта ось перпендикулярна к грани. Такие сфеноиды, у которых хоть одна из осей, вписанных в тригоноэдры конусов, будет перпендикулярна к противоположной грани, мы назовем прямыми в отличие от прямых трехгранных пирамид, под которыми, как известно, подразумеваются такие сфеноиды, у которых основание есть правильный трехугольник, а вершина лежит на перпендикуляре к основанию, проведенном через центр фигуры.[1])

Следствие. Соединив центр вписанного в сфеноид шара с точками его касания, мы получим четыре прямых, представляющих ребра четырех тригоноэдров, дополнительных тригоноэдрам самого сфеноида. Назвав эти прямые через a, b, c и d, мы увидим, что между ними образуется 6 плоских углов: ab, ac, ad, bc, bd и cd. Их сумма составляет дополнение до $12d$ суммы двугранных углов сфеноида, т. е. $ab+ac+ad+bc+bd+cd=12\,d-\Sigma B$; но $\Sigma B=$ $=\Sigma G+4d$, если через ΣB означим сумму двугранных, а че-

[1]) Об определении прямых пирамид см.: H. Wittek, Zeitschr. f. d. Realsch. in Oester., 5, стр. 142 и сл. — E. Seewald, там же, стр. 287. Цит. из „Fortschrit der Mathematik“.

рез ΣG — сумму гоноэдров сфеноида. Следовательно, $\Sigma P = 8d - \Sigma G$, и наоборот $\Sigma G = 8d - \Sigma P$, если через ΣP означим сумму плоских углов дополнительных гоноэдров.

Чтобы найти эту сумму, можно поступить следующим образом. Положим, что нам дан сфеноид, четыре грани которого будучи совмещены с плоскостью чертежа будут (фиг. 26) abc, acd, abd_1 и bcd_2. Проведем прямую oo' перпендикулярно к bc и вообразим, что через нее проходит плоскость, перпендикулярная к плоскости чертежа; если из точек, принадлежащих сфеноиду, или каких-нибудь других мы будем опускать на нее перпендикуляры, то ясно, что расстояния от основания этих перпендикуляров до oo' будут указывать на возвышение взятой точки над плоскостью чертежа; предположим, наконец, что эта плоскость со всеми нанесенными на ней точками повернута около oo', как около оси, на 90° и совмещена с плоскостью чертежа; тогда мы



Фиг. 26.

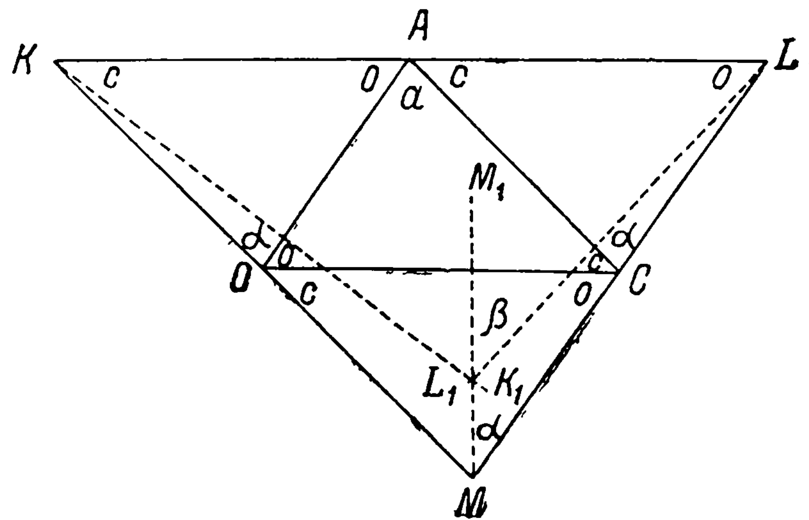
увидим воображаемый чертеж воспроизведенным на ней в натуральную величину. Точки этого чертежа, соответствующие точкам первого, означим теми же буквами, только со значками.

Отыскав центры описанных около граней кругов, а именно точки k, c_1, b_1 и a_1, и опустив из них, а также и из вершин d, d_1 и d_2 боковых граней перпендикуляры на основания трехугольников, мы получим две точки k и m, из коих первая есть центр описанного шара, а вторая — вершина сфеноида, когда сомкнутся грани. Точное определение положения

этих точек дается их возвышением; чтобы найти возвышение точки m, проведем из b, как из центра, дугу радиусом ed_2 до пересечения с mm', перпендикулярной к oo'; чтобы найти возвышение точки k, отложим $b'a'=ia_1$, и из точки a' восставим перпендикуляр $k'a'$ до пересечения с kk_1, также перпендикулярной к oo'. Угол $a'k'k$ есть один из шести искомых плоских углов.

§ 16. Теорема 7. *Существует бесчисленное множество равноугольных сфеноидов.*

Выведем условия образования такого сфеноида. Мы знаем, что равным тригоноэдрам соответствуют равные дополнительные. Построив такие углы около одной какой-либо точки внутри сфеноида, мы увидим, что сумма их, как занимающих все пространство около этой точки, равна $4d$, а следовательно, каждый из них равен d. Сумма двугранных углов каждого из них получится из уравнения $d=\frac{x}{2}-d$, откуда $x=4d$. Отсюда следует, что сумма плоских углов гоноэдра в таком сфеноиде равна $6d-4d=2d$. Это указывает способ построения.



Фиг. 27.

В самом деле, начертим какой-нибудь трехугольник OAC (фиг. 27) и проведем через его вершины прямые KM, KL и LM, параллельные противоположным основаниям. Тогда около каждой из точек O, A и C получим три угла заданного трехугольника, т. е. какие-нибудь углы, сумма которых равна $2d$; значит, эти углы можно принять за плоские углы гоноэдра равноугольного сфеноида. Это же построение определяет три трехугольника OAK, ACL и COM, равные данному, которые могут сомкнуться в сфеноид, так как $AK=AL$, $LC=CM$ и $MO=OK$. Прямые, означенные пунктиром и проведенные из точек K, L и M перпендикулярно

к сторонам OA, AC и CO, представляют проекции плоскостей, в которых будут двигаться эти точки при сомкнутии сфеноида, а точка B пересечения этих прямых есть проекция четвертой вершины сомкнутого сфеноида. Чтобы наглядно указать, что этот сфеноид будет равноугольником, все равные плоские углы обозначены одними и теми же буквами.

Примечание. Для этих сфеноидов мы уже вывели (следствие „c“ теоремы 3), что двугранные углы, имеющие противолежащие ребра, равны между собою.[1])

Следствие a. Правильный тетраэдр есть частный случай равноугольного сфеноида.

Следствие b. Очевидно, что существует бесчисленное множество и таких равноугольных сфеноидов, которых грани прямоугольные или равнобедренные трехугольники, так как каждый трехугольник можно сделать гранью равноугольного сфеноида.

Следствие c. Из самого образования равноугольного сфеноида видно, что все его грани равны, и, следовательно, *равноугольный сфеноид есть равногранник.*

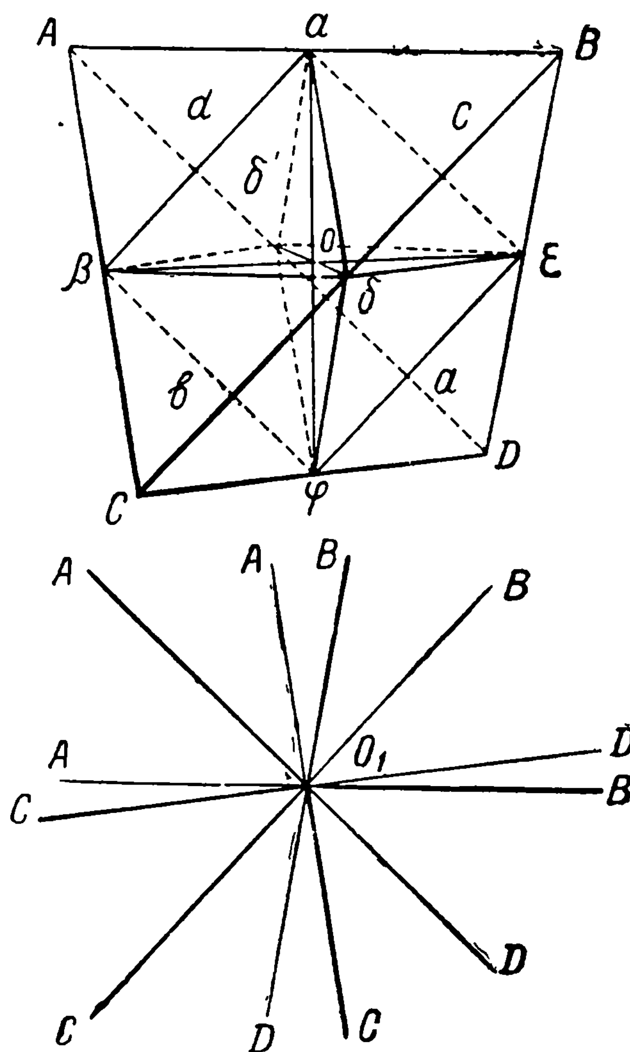
§ 17. Определение 8. Дисфеноидом называется многогранник, шесть вершин которого представляют средины ребер сфеноида.

Теорема 8. *Сумма гоноэдров дисфеноида плюс двойная сумма гоноэдров соответствующего ему сфеноида равна* $4d$.

Возьмем сфеноид $ABCD$ (фиг. 28) и соединим середины его ребер; получим дисфеноид $\alpha\beta\delta\varepsilon\delta'\varphi$. Ясно, что в дисфеноиде имеется по два ребра, параллельных одному из ребер сфеноида; так, $\alpha\beta \parallel BC \parallel \varepsilon\varphi$, потому что $\frac{AC}{A\beta} = \frac{AB}{A\alpha} = 2$ и $\frac{DC}{D\varphi} = \frac{DB}{D\varepsilon} = 2$. Отсюда заключаем, что в дисфеноиде имеется

[1]) Вывод этой, а также нескольких других, сюда относящихся теорем, можной найти в статьях Чефик-Бея (Chéfik-Bey, Nouv. ann. de math. par Gerono et Brisse, 2, XIX, стр. 403), а также Э. Лемуэна (E. Lemoine, там же, стр. 133).

четыре пары параллельных граней; одна из граней каждой такой пары есть грань сфеноида; так, грань $\alpha\beta\delta$ совпадает с ABC, а $\delta'\varepsilon\varphi$ ей параллельна. Из параллельности граней вытекает соотношение двугранных углов, а именно, те два двугранных угла, которых ребра параллельны, равны между собой. Отсюда следует далее, что противолежащие гоноэдры симметричны, а также грани дисфеноида соответственно равны между собой, а также, что двугранные углы дисфеноида составляют дополнение до $2d$ двугранным углам сфеноида, например $\alpha\beta + BC = 2d$ и т. д.



Фиг. 28.

Итак, сумма углов сфеноида равна $\Sigma B_s - 4d$;[21] сумма гоноэдров дисфеноида получится, если примем в соображение, что гоноэдры его — тетрагоноэдры, $\Sigma B_d - 12d$;[22]. соотношение же между двугранными углами выражается следующим образом:

$$\alpha\beta + BC = 2d,\quad \alpha\delta' + BD = 2d;\quad \beta\delta' + CD = 2d,$$
$$\beta\varphi + AD = 2d,\quad \delta'\varphi + AC = 2d,\quad \delta'\varepsilon + AB = 2d,$$
$$\varphi\varepsilon + BC = 2d,\quad \varphi\delta + BD = 2d,\quad \varepsilon\delta + CD = 2d,$$
$$\varepsilon\alpha + AD = 2d;\quad \delta\alpha + AC = 2d,\quad \delta\beta + AB = 2d.$$

Складывая все эти 12 равенств, получаем $\Sigma B_d + 2\Sigma B_s = 24d$ или $(\Sigma B_d - 12d) + 2(\Sigma B_s - 4d) = 4d$, что и требовалось доказать.

Следствие. Этот результат в связи с тем, что плоские углы дисфеноида равны углам сфеноида, а двугранные дополняют до $2d$ двугранные углы сфеноида, приводит к выводу, что около одной точки в пространстве можно поме-

стить все углы дисфеноида и двойное число углов сфеноида таким образом, что совокупность их выполнит все пространство. Этот вывод станет очевидным, когда через произвольную точку O_1 проведем шесть прямых соответственно параллельных ребрам сфеноида. При этом ясно видно, что при точке O_1 имеется по два таких угла, из которых один равен углу сфеноида, а другой ему симметричен, так как ребра обоих углов составляют прямые линии; это показывает в свою очередь, что для заполнения около одной точки пространства нужно брать два различных сфеноида, из которых углы одного были бы симметричны углам другого. Различие этих двух сфеноидов выражают обыкновенно словами „правый" и „левый". Ясно, что сами „правый" и „левый" сфеноиды будут симметричны по отношению друг к другу.

Примечание. Прямые $\alpha\varphi$, $\beta\varepsilon$ и $\delta'\delta$, соединяющие середины противоположных ребер сфеноида (фиг. 28), называются его осями; разностям сфеноида соответствуют разные системы осей:

1) Если сфеноид правильный, т. е. тетраэдр, то $\beta\delta' = \delta'\varepsilon = \varepsilon\delta = \delta\beta$, кроме того $\alpha\beta = \alpha\delta' = \alpha\varepsilon = \alpha\delta$, откуда заключаем, что и $o\beta = o\delta' = o\varepsilon = o\delta$, а потому $\delta'\beta\delta\varepsilon$ есть квадрат; также докажем, что $\alpha\beta\varphi\varepsilon$ и $\alpha\delta'\varphi\delta$ суть также квадраты. Следовательно, в этом случае все три оси равны и перпендикулярны друг к другу; такую систему осей называют правильной.

1) Если сфеноид равногранный равнобедренный, то $AC = CB = BD = DA$; отсюда, подобно предыдущему случаю, заключаем, что $\beta\delta'\varepsilon\delta$ квадрат; но два других осевых сечения в этом случае будут не квадраты, а ромбы. В этом случае оси взаимно перпендикулярны и две из них $\delta'\delta$ и $\beta\varepsilon$ равны. Такая система осей называется квадратной.

3) Если сфеноид равногранный, но не равнобедренный, то все три осевых сечения будут ромбы, так как $AB = CD$, $AC = BD$ и $AD = BC$. Такая система осей называется ромбической.

4) Если сфеноид парногранный, то получается особая система осей. Пусть $BC = AD$ и $BD = AC$; в этом случае $\alpha\delta'\varphi\delta$ и $\alpha\beta\varphi\varepsilon$ — ромбы и $\alpha\varphi$ перпендикулярна к $\delta'\delta$ и $\beta\varepsilon$, но $\beta\delta'\varepsilon\delta$ не ромб, потому что $\beta\delta$ не равно $\delta\varepsilon$, а следовательно, угол $\beta o\delta$ не прямой; плоскость $\beta\delta'\varepsilon\delta$ делит систему на две симметрические половины. Такая система называется моносимметрической (моноклиноэдрической).

5) Наконец, если ни одно из этих условий не выполняется, то система называется асимметрической (триклиноэдрической), т. е. с тремя наклонными осями и без плоскостей симметрии.

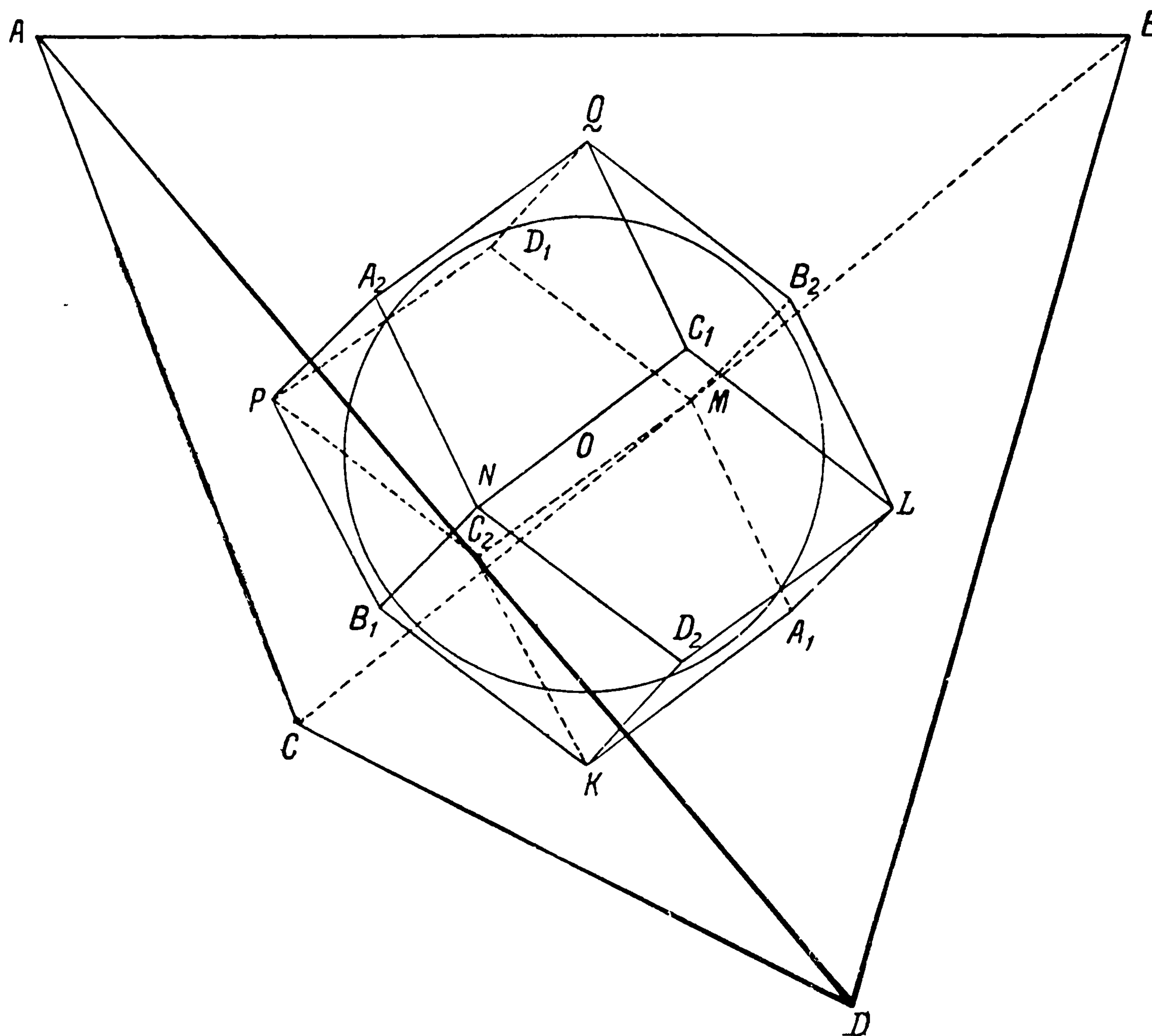
При правильной, квадратной и ромбической системах все грани дисфеноида равны между собой, т. е. он есть равногранник; при моноклиноэдрической системе имеются по две равные грани с каждой стороны плоскости βδ'εδ; наконец, при триклиноэдрической системе только противоположные грани дисфеноида равны между собой.

§ 18. Теорема 9. *Правильному тетраэдру соответствует особенный двенадцатигранник, обладающий следующими свойствами: все его двугранные углы равны между собой и составляют дополнение до 2d плоским углам тетраэдра, т. е. равны 120°; грани его — равные ромбы, имеющие двоякого рода углы: тупые, составляющие дополнение до 2d двугранным углам тетраэдра, и острые, им равные. У него 14 вершин: шесть из них — вершины правильных тетрагоноэдров и восемь — правильных тригоноэдров, дополнительных тригоноэдрам тетраэдра.*

Представим себе, что около какой-нибудь точки O (фиг. 29) мы поместили 6 углов правильного дисфеноида (октаэдра) и восемь — правильного тетраэдра таким образом, чтобы они заполнили все пространство; этого достигнем, проведя через нее шесть прямых, параллельных ребрам тетраэдра $ABCD$. Если примем точку O за центр и опишем около нее произвольным радиусом шаровую поверхность, а в точках пересечения последней с прямыми проведем плоскости, касательные к шару, т. е. к ним перпендикулярные, то получим 12 граней нового многогранника с шестью парами взаимно параллельных граней, с шестью правильными тетрагоноэдрами, вершины которых K, L, M, N, P и Q, дополнительными тетрагоноэдрам октаэдра, и с восемью правильными тригоноэдрами, вершины которых A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2 и D_2, дополнительными тригоноэдрам тетраэдра, что вытекает из самого построения. Каждые два смежных ребра грани равны между собою, потому что представляют собою прямые, соединяющие точку, лежащую на оси правильного тетрагоноэдра, с точками,

находящимися на осях двух смежных с первым правильных тригоноэдров, отстоящими на равном расстоянии от центра; следовательно, грани многогранника суть ромбы.

Примечание. Равногранник этот называется ромбическим додекаэдром.



Фиг. 29.

Следствие a. Тригоноэдры этого многогранника равны $G = \frac{3 \cdot 120}{2} - 90 = 90$, т. е. таких углов около точки помещается четыре; тетрагоноэдры его равны $G = \frac{4 \cdot 120}{2} - 180 = 60$, т. е. таких углов около точки помещается шесть.

Следствие b. Ясно, что ромбический додекаэдр относится к октаэдру совершенно так же, как к тетраэдру, т. е. что грани его могут быть приняты перпендикулярными

к 12 ребрам октаэдра, а его тетрагоноэдры дополнительны углам октаэдра и его плоские острые углы дополнительны до $2d$ двугранным углам октаэдра и, следовательно, равны двугранным углам тетраэдра.

Следствие с. Многогранник этот обладает замечательным свойством *складываться в пространстве*. В самом деле, если, например, на 4 грани при точке Q мы положим четыре ромбических додекаэдра в параллельном положении, то двугранные углы, как равные 120°, выполнят пространство по ребрам QA_2, QC_1, QB_2 и QD_1; останется место как раз еще для одного тетрагоноэдра, т. е. ромбического додекаэдра, как это выходит из следствия „а". К тому же заключению придем и по отношению к вершинам тригоноэдров.

Глава 4

О МНОГОГРАННИКАХ, ИХ ПЛОСКИХ И ТЕЛЕСНЫХ УГЛАХ И ОБЩИХ УСЛОВИЯХ ИХ ОБРАЗОВАНИЯ

§ 19. Определение 9. Типическим многогранником, соответствующим данному, называется такой, который получится, если мы из центра произвольно помещенного в пространстве шара с произвольным радиусом проведем прямые, перпендикулярные ко всем граням данного, до пересечения с шаровой поверхностью и в этих точках проведем к шару касательные плоскости до взаимного пересечения.

Теорема 10. *Сумма гоноэдров, дополнительных гоноэдрам какого угодно многогранника, равна $4d$.*

В самом деле, чтобы получить эту сумму, нужно из произвольной точки внутри многогранника опустить на все его грани перпендикуляры. Ясно, что сумма полученных таким образом гоноэдров, дополнительных гоноэдрам данного многогранника, как сумма углов около одной точки, равна $4d$.

Примечание. Не следует упускать из вида, что теорема эта прилагается только к выпуклым многогранникам.

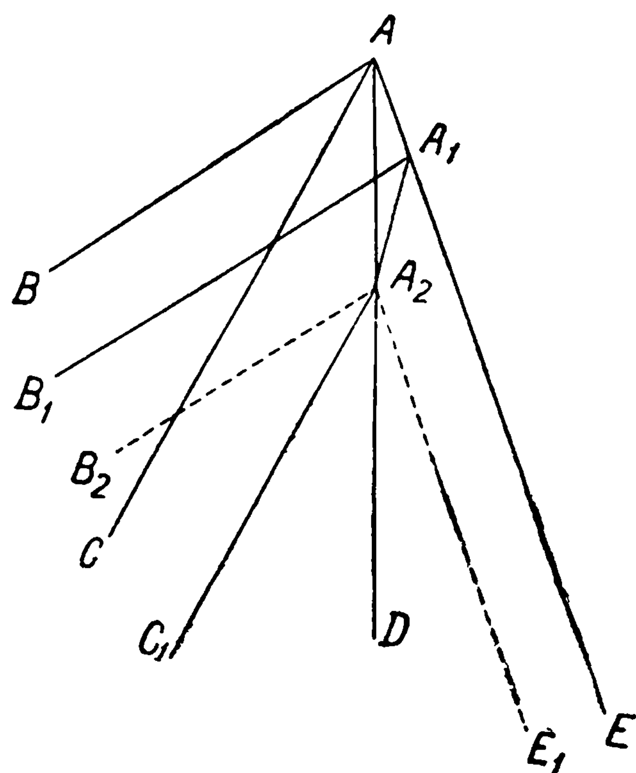
Определение 10. Совокупность многогранников, имеющих тождественную систему дополнительных гоноэдров, называется видом всякого данного многогранника с той же системой.

Следствие a. Из этого и предыдущего определения следует, что все типические многогранники данного вида подобны. Из этих же двух определений следует, что в каждом виде число граней есть величина постоянная, и притом во всех многогранниках данного вида все грани соответственно параллельны, если многогранники расположим приличным образом.

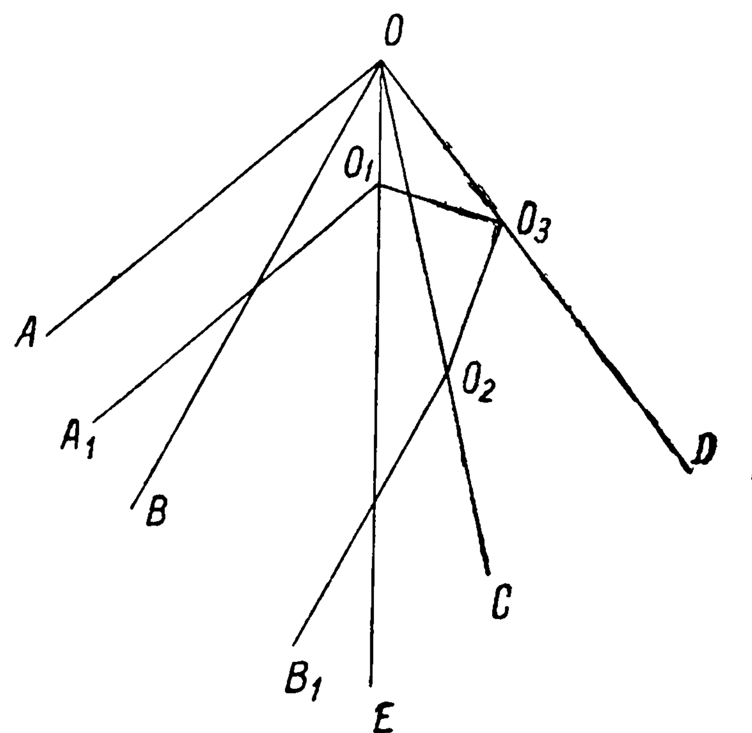
Следствие b. Ясно, что вообще углы типического многогранника (так же как и многогранника вообще) суть тригоноэдры, так как вообще в одной точке пересекаются только три плоскости (в нашем случае плоскости, касательные к шару, проведенные через концы ребер дополнительных гоноэдров). Но может случиться, что в одной точке пересекается несколько плоскостей, касательных к шару; однако стоит только заменить приличную для этого случая точку касания другой точкой, лежащей на одном с ней ребре (принадлежащем системе дополнительных гоноэдров) и притом бесконечно близкою к ней, и каждый гоноэдр с бо́льшим чем 3 числом граней разложится на тригоноэдры, а именно тетрагоноэдр (фиг. 30) на 2 тригоноэдра, пентагоноэдр — на 3 тригоноэдра (фиг. 31) и вообще n-гоноэдр — на $n-2$ тригоноэдра. Преобразованный таким образом типический многогранник мы будем называть типическим измененным; итак, все углы типического измененного многогранника суть тригоноэдры. Ясно, что гоноэдр с бо́льшим чем 3 числом граней получается тогда, когда в данной системе из нескольких соседних ребер можно составить гоноэдры, около которых можно описать конус, так как в гоноэдры им дополнительные можно вписать шар, а следовательно, и конус.

Следствие c. Уже из предыдущего следствия легко заключить, что, несмотря на параллельность граней, гоноэдры

многогранников одного и того же вида могут различаться по величине. Это заключение станет еще очевиднее, если вместо гоноэдров мы будем рассматривать соответствующие сферические многоугольники. Ясно, что из одних и тех же точек на сфере мы можем построить различные многоугольники, так же как различные плоские многоугольники мы можем составить из одних и тех же точек на плоскости. Но для каждого такого многоугольника мы можем построить соот-



Фиг. 30.



Фиг. 31.

ветствующий гоноэдр в многограннике, относящемся к тому же самому виду; для этого нужно взять внутри многоугольника на сфере произвольную точку, соединить ее с центром и из произвольной точки полученной прямой провести плоскости, перпендикулярные ко всем соседним ребрам, соответствующим вершинам сферического многоугольника, и мы получим искомый гоноэдр.

Определение 11. Совокупность многогранников, принадлежащих данному виду, но имеющих равное число равных и соответственно расположенных гоноэдров, называется разновидностью.

Определение 12. Совокупность подобных многогранников называется индивидуальностью.

Примечание. Очевидно, что не только каждой разновидности, но и каждой индивидуальности соответствует другая разновидность или индивидуальность, ей симметричная.

Следствие а. В каждом виде существует определенное число разновидностей; это число определяется совокупностью тех комбинаций гоноэдров, которые можно воспроизвести, не изменяя данной их системы, т. е. положения их ребер. Не трудно видеть, что существуют различные разновидности даже при одном и том же числе одноименных гоноэдров. В самом деле, построив, как выше, различные сферические многоугольники, мы можем каждый из них разбить на одно и то же число разных сферических трехугольников, а между тем каждой такой системе соответствует своя особая разновидность. Сфеноиды не имеют разновидностей, так как все их углы — тригоноэдры.

Из числа разновидностей данного вида обращают на себя внимание те, которые получатся, если мы разделим сферу плоскостью на две равные половины, проведем из центра к этой плоскости перпендикуляр и на двух произвольных его точках по одну и другую сторону сферы проведем плоскости, перпендикулярные к тем ребрам, соответствующие которым точки находятся на одной и той же с данной точкой стороне сферы. Ясно, что сумма наименований двух полученных гоноэдров равна общему числу ребер системы.

Теорема 11. *Все многогранники, принадлежащие одному и тому же виду, имеют одно и то же истинное число вершин, одно и то же истинное число гоноэдров, двугранных и плоских углов, одно и то же число граней и истинное число ребер.*

Под словом „истинное“ мы подразумеваем то число, которое относится к типическому измененному многограннику. В самом деле, мы знаем, что если и встретится такой многогранник в данном виде, коего гоноэдры имеют большее чем три число граней, то изменение положения плоскостей его граней на величину меньшую всякой данной заставляет все

такие гоноэдры разлагаться на тригоноэдры. Поэтому на гоноэдры, имеющие число граней большее трех, мы можем смотреть как на совокупность нескольких гоноэдров, в которых ребра, соединяющие их вершины, делаются меньшими всякой данной величины. На основании этого взгляда мы должны признать в тетрагоноэдре две, в пентагоноэдре три и вообще в n-гоноэдре $n-2$ вершин тригоноэдров; эти числа и будут выражать истинное число вершин в отличие от „кажущегося", когда в каком бы то ни было гоноэдре мы принимаем одну вершину. Так как система гоноэдров, определяющая данный вид, разбивается на определенное число тригоноэдров, то ясно, что истинное число вершин для каждого вида есть величина постоянная, а также истинное число плоских углов, которое втрое больше первого, истинное число ребер, которое вдвое меньше этого последнего числа, так как каждое ребро соединяет две какие-нибудь вершины, и, наконец, число двугранных углов, которое, очевидно, равно числу ребер. Равенство же числа граней вытекает из самого определения вида.

Примечание. Для того чтобы по кажущимся, т. е. непосредственно наблюдаемым, числам определять числа истинные, определим соотношение, существующее между теми и другими. Фиг. 30 показывает нам, какие изменения в многограннике происходят при разложении тетрагоноэдра на 2 тригоноэдра, когда изменяется положение одной из граней BAC в другое бесконечно близкое $B_1A_1A_2C_1$; ясно, что при этом является новое ребро A_1A_2, а с ним новый двугранный угол, и притом, какой именно является угол, — зависит от того, какую именно грань мы переносим в другое положение, параллельное прежнему. Легко видеть, что именно на величину этого угла возрастает сумма гоноэдров. В самом деле

$$A=\frac{AB+AC+AD+AE}{2}-2d;$$

$$A_1=\frac{A_1B_1+A_1E+A_1A_2}{2}-d=\frac{AB+AE+A_1A_2}{2}-d;$$

$$A_2=\frac{A_2C_1+A_2D+A_2A_1}{2}-d=\frac{AC+AD+A_1A_2}{2}-d;$$

а отсюда $A_1+A_2=\frac{AB+AC+AD+AE}{2}-2d+A_1A_2=A+A_1A_2.$

Что касается суммы плоских углов, то легко видеть, что она возрастает на $4d$. В самом деле, проведя $A_2B_2 \parallel AB$ и $A_2E_1 \parallel AE$, мы найдем, что $A_2.B_2C_1DE_1$ равен первоначальному и в нем угол $B_2A_2E_1 = B_1A_1E$. Новые же явившиеся углы будут $B_1A_1A_2 + B_2A_2A_1 = 2d$ и $EA_1A_2 + E_1A_2A_1 = 2d$, т. е. сумма всех четырех углов есть $4d$.

Из фиг. 31 с помощью тех же соображений мы убедимся, что из пентагоноэдра при разложении его на тригоноэдры является два новых ребра O_1O_3 и O_3O_2 и с ними два новых двугранных угла, на величину которых и возрастает сумма телесных углов; далее, что сумма плоских углов возрастает на $2 \cdot 4d$. Вообще при разложении n-гоноэдра на тригоноэдры из одной кажущейся вершины образуется $n-2$ истинных; число ребер возрастает на $n-3$; сумма телесных углов возрастает на величину двугранных, имеющих эти $n-3$ ребра; наконец, сумма плоских углов возрастает на $(n-3)\,4d$.

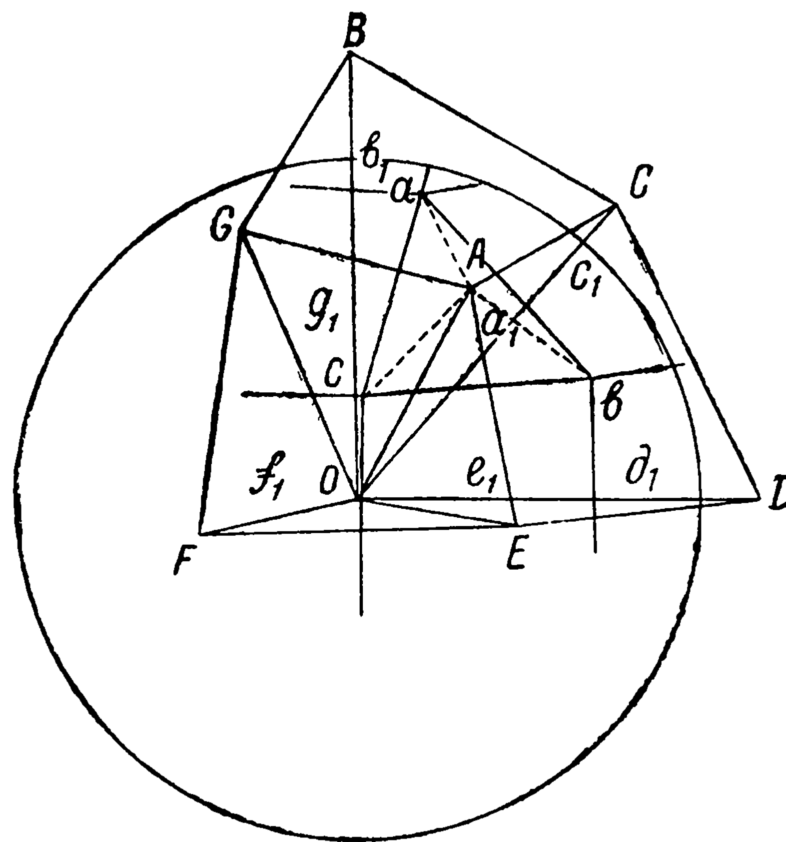
§ 20. Определение 13. Многогранником подтипическим по отношению к данному виду многогранников называется такой, вершины которого суть точки касания типического.

Теорема 12. *Многогранник подтипический по отношению к данному виду имеет число вершин, равное числу граней типического, число граней — числу его вершин и одно и то же с ним число ребер. Каждой его грани соответствует одна из вершин типического, и число сторон в грани (т. е. ее наименование) равно числу граней при соответствующей вершине типического (т. е. наименованию гоноэдра при этой вершине); и наоборот, каждая его вершина соответствует одной из граней типического и число граней при этой вершине равно числу сторон при соответствующей грани типического.*[1])

[1]) Отношения, выводимые в этой теореме, переносят нас в другую область — отношений проективных (теория полюсов и поляр). И в этой области они были поняты уже давно (см., например: Möbius. Ueber Figuren im Raume. Crelle Journ., т. 10, стр. 326, 1833). Но и в области синтетической геометрии они иногда служили предметом исследования (см.: C. Jordan. Recherches sur des polyèdres. Crelle Journ., т. 66, теоремы 8—12).

Примечание. Когда мы говорим о числе вершин, ребер и проч. без означения „истинное“ или „кажущееся“, то подразумеваем последнее, как непосредственно наблюдаемое.

Возьмем (фиг. 32) какие-нибудь три грани $AGBC$, $ACDE$ и $AEFG$, касательные к шару и, следовательно, принадлежащие типическому многограннику. Пусть их точки касания будут соответственно a, b и c. Каково бы ни было число граней при точке A, но так как это грани, касательные к шару, то $Aa = Ab = Ac$, т. е. точки a, b, c, сколько бы их ни было, должны лежать в одной плоскости, ибо конус, вписанный в гоноэдр, имеющий вершину A и касательный к шару по окружности, должен проходить через все эти точки, и, следовательно, они должны находиться на одной и той же окружности. В плоскости этой окружности и будет находиться грань подтипического, соответствующая вершине A; это соображение одинаково относится ко всем вершинам типического и потому ясно, что вершине B будет соответствовать некоторая грань b_1, вершине C — грань c_1 подтипического многогранника и т. д. Обратное же соотношение еще очевиднее. В самом деле, на каждой грани типического имеется точка касания к шару, а эта точка именно и будет соответствующей вершиной подтипического; так, грани $AGBC$ соответствует вершина a, грани $ACDE$ — вершина b



Фиг. 32.

Однако, так как до сих пор не было выяснено самое понятие о типических многогранниках, то они и касались вообще пары каких-нибудь индивидуальных фигур.

взаимного и т. д. Отсюда вытекает и означенное соотношение между числом вершин типического и числом граней подтипического и обратное соотношение между числом граней типического и вершин подтипического. Что же касается равенства числа ребер, то оно вытекает из того, что число сторон в грани подтипического, например, три в грани abc, равно числу граней при соответствующей вершине типического, например, опять три при вершине A. Так как каждой вершине какой-нибудь грани типического соответствует некоторая грань подтипического, например вершинам B, C, A и G соответствуют грани b_1, c_1, a_1 и g_1, то ясно, что число сторон в грани типического равно числу граней при соответствующей вершине, например, a подтипического, а именно в данном случае число это есть четыре.[1]) Таким образом, число ребер, определяемое по гоноэдрам типического, равно числу ребер, определяемому по граням подтипического, и наоборот; между тем очевидно все равно, как определять число ребер, по гоноэдрам ли или по граням.

Следствие. Ясно, что эта теорема приводит к неопределенно большому числу следствий. Приведем наиболее интересные.

а) Каждому правильному многограннику (типическая индивидуальность) соответствует правильный подтипический и наоборот. В самом деле, грани такого многогранника суть правильные многоугольники, а гоноэдры его тоже правильные. Ясно, что грань подтипического, соответствующая вершине

[1]) Грани подтипического многогранника перпендикулярны к прямым, проведенным из центра шара к вершинам типического. В самом деле, конус, дополнительный конусу, вписанному в гоноэдр типического, и притом имеющий вершину в центре, будет опираться на один общий с ним круг, описывающий фигуру грани подтипического, а следовательно, и прямая, соединяющая центр шара с вершиною типического, как общая ось дополнительных конусов, будет перпендикулярна к плоскости общего основания, т. е. грани подтипического. Не трудно видеть также, что вершины типического суть полюсы граней подтипического по отношению к вписанному шару и наоборот.

правильного гоноэдра типического, есть тоже правильный многоугольник, а так как все гоноэдры типического одноименны, то и все грани взаимного — одноименные правильные многоугольники, т. е. сам взаимный многогранник будет правильный.

Подтипический тетраэдру имеет 4 грани — правильные трехугольники, 4 вершины правильных тригоноэдров, 6 равных ребер, т. е. будет также *правильный тетраэдр.*

Подтипический октаэдру имеет 6 граней — квадратов, 8 вершин правильных тригоноэдров и 12 равных ребер, т. е. он есть *куб.*

Подтипический кубу очевидно есть *октаэдр.*

Подтипический икосаэдру имеет 12 граней — правильных пятиугольников, 20 вершин правильных тригоноэдров и 30 равных ребер, т. е. он есть *правильный додекаэдр.*

Подтипический додекаэдру очевидно есть правильный *икосаэдр.*

b) *Подтипический прямой двойной пирамиде* есть, очевидно, *прямая призма*; и обратно, *подтипический прямой призме* есть *прямая бипирамида.*

c) *Подтипический прямому двойному конусу* есть *прямой цилиндр*; и обратно, *подтипический прямому цилиндру* есть *прямой двойной конус.*

d) Каждый сфеноид есть одновременно и типический и подтипический многогранник (теоремы 5 и 6).

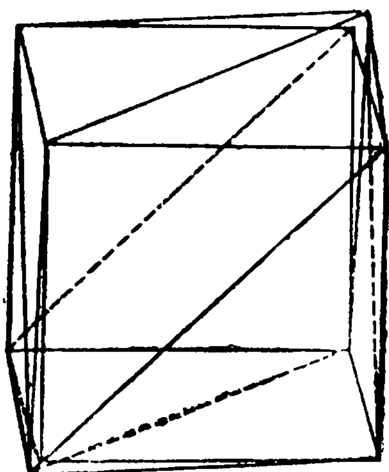
e) Каждый равногранный и равноугольный сфеноид есть одновременно и подтипический и типический также по отношению к некоторым равногранным и равноугольным сфеноидам.

f) Не трудно убедиться также, что каждый равнобедренный сфеноид есть одновремено и подтипический и типический некоторым парногранным сфеноидам. Это следует из присутствия плоскости симметрии.

Определение 14. Измененным подтипическим многогранником называется такой, который получится, если соеди-

ним прямыми смежные передвинутые точки касания измененного типического.

Следствие. Очевидно, что все грани такого многогранника — трехугольники, хотя сам многогранник и бесконечно близок к подтипическому, у которого могут случиться и другие грани. Например, из фиг. 33 мы ясно видим, что если изменим положение двух противоположных вершин куба на величину, меньшую всякой данной, то тотчас же каждая его грань распадается на два трехугольника. Это распадение будет соответствовать тому изменению октаэдра, которое произойдет, если мы изменим положение двух параллельных его граней на величину, меньшую всякой данной; октаэдр будет иметь тогда 12 вершин; две из его граней станут шестиугольниками, а остальные шесть — четырехугольниками; так и в измененном кубе получается 12 граней; две из его вершин принадлежат гексагоноэдрам, а остальные шесть — тетрагоноэдрам. Так как измененный подтипический и вообще какой угодно многогранник, грани которого распадаются на трехугольники от бесконечно малого изменения в положении некоторых его вершин, все-таки бесконечно близок к неизмененному многограннику, то теоретически мы можем отождествлять их и принимать всякий многогранник за измененный таким образом; но в этом случае, хотя число вершин и остается то же самое, но число граней и ребер изменяется, а также наименование граней, которые все становятся трехугольниками, и гоноэдров. Числа, относящиеся к такому измененному многограннику, мы будем называть теоретическими в отличие от действительных.[1])



Фиг. 33.

§ 21. Определение 15. Центральным углом какого-нибудь многогранника, имеющего центр, называется гоноэдр,

[1]) Первый намек на такого рода концепцию мы встречаем у Пуансо (Poinsot. Note sur la théorie des polyèdres. C. r., т. 46, стр 65).

вершина которого есть центр, а ребра — прямые, соединяющие центр с вершинами какой-нибудь грани многогранника.

Определение 16. Центральным дополнительным углом какого-нибудь многогранника, имеющего центр, называется гоноэдр, вершина которого есть центр, а ребра — прямые, перпендикулярные к граням фигуры, проходящим через одну вершину.

Теорема 13. *Центральные и центральные дополнительные углы правильного многогранника соответственно равны между собой.*

Второе положение не требует доказательства, так как известно, что равным углам соответствуют и равные дополнительные. Не трудно доказать и первое. В самом деле, вписав многогранник в шар и соединив все его вершины с центром, мы получим столько равных пирамид, сколько в нем граней, а если совместятся сами пирамиды, то и углы при их вершинах.

Следствие. На основании этой теоремы не трудно сделать *вывод всех правильных многогранников.*

Так как грани их фигуры правильные, то, значит, плоские углы имеют определенные величины 60, 90, 108° и т. д. Начнем с первых, т. е. с тех, грани которых правильные трехугольники. Очевидно двугранные углы центральных дополнительных гоноэдров будут в 120°. Предположим сначала, что гоноэдры многогранника имеют три грани. Величина центрального дополнительного гоноэдра $G=\frac{360}{2}-90=90°$; значит, у этого многогранника 4 вершины; это есть *тетраэд.*

Предположим теперь, что гоноэдры имеют 4 грани; в этом случае $G=\frac{480}{2}-180=60°$, т. е. многогранник имеет 6 вершин, т. е. это будет *октаэдр.*

Теперь перейдем к случаю пентагоноэдра; $G=\frac{600}{2}-270=30°$. У многогранника 12 вершин, т. е. он есть *икосаэдр.*

В случае гексагоноэдра получаем $G = \frac{720}{2} - 360 = 0$. Итак, число вершин этого многогранника есть ∞, т. е. это будет *шар*. Поэтому шар можно рассматривать как правильный многогранник, имеющий бесконечно большое число вершин и граней — правильных трехугольников, углы которого гексагоноэдры.[1])

Теперь рассмотрим те правильные многогранники, у которых грани квадраты и, значит, плоские углы 90°. Начнем опять со случая тригоноэдров. В этом случае $G = \frac{270}{2} - 90 = 45$, т. е. многогранник имеет 8 вершин, и, значит, он есть *куб*.

В случае тетрагоноэдров $G = \frac{360}{2} - 180 = 0$. Опять пришли к *шару*; значит, на шар можно смотреть, как на правильный многогранник с бесконечным число вершин и граней квадратов, углы которого тетрагоноэдры.

Теперь перейдем к тем, грани которых правильные пятиугольники; величина угла 108°, а двугранного угла дополнительного 72°. Начнем со случая тригоноэдров: $G = \frac{216}{2} - 90 = 18$, значит у него 20 вершин и он есть *додекаэдр*. В случае тетрагоноэдров $G = \frac{288}{2} - 180 = -36$, — результат невозможный.

У многогранников, грани которых правильные шестиугольники, плоские углы равны 120°, а следовательно, двугранные — дополнительных гоноэдров будут в 60°. Начнем с тригоноэдров $G = \frac{180}{2} - 90 = 0$. Опять приходим к *шару*. Итак, на

---

[1]) Это представление выражено в первый раз Лидонном в 1808 г. (см. также: Lhuilier, Ann. de math. par Gergonne, 3, стр. 233). Если мы придадим этим граням конечную величину, то шар будет иметь бесконечно большой радиус, т. е. превратится в плоскость, а его поверхность — в безграничную совокупность правильных фигур. Разыскание таких совокупностей составляло одну из задач Бадуро в его „Mémoire sur les figures isoscèles“ (Journ. de l'Ec. polyt., тетр. 49).

шар можно смотреть, как на правильный многогранник, имеющий бесконечное число вершин и граней — правильных шестиугольников, углы которого — тригоноэдры.

Примечание. Складывая число всех правильных многогранников, мы получаем не 5 и даже не 6, а 9, а именно, кроме обыкновенно принимаемых, следует признать три вида шара и два вида правильного тетраэдра. Хотя два последних вида и тождественны по своим элементам, но различаются по своему положению в шаре. Хотя этому различию и не давали места в геометрии, однако это признано необходимым в другой сродственной науке, кристаллографии. Это различие выражают словами „положительный" и „отрицательный", или „правый" и „левый" тетраэдры. Математически различие между тетраэдрами можно выразить следующим образом: два правильных тетраэдра есть пределы двух рядов симметричных сфеноидов, когда грани их делаются правильными трехугольниками.

Теорема 14. *Сумма плоских углов какого угодно многогранника равна $4d$, умноженным на число вершин без двух.*[1])

Пусть у данного многогранника n вершин каких угодно гоноэдров. Назовем центральный дополнительный угол через D, а сумму плоских углов при вершине какого-нибудь гоноэдра через ΣP; на основании теоремы 18 I отдела получим

$$D_1 = 2d - \frac{\Sigma P_1}{2};$$

$$D_2 = 2d - \frac{\Sigma P_2}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n = 2d - \frac{\Sigma P_n}{2}.$$

[1]) Теорема эта была выведена в первый раз Эйлером и составляет теорему III его известной статьи „Demonstratio nonnularum insignium proprietatum quibus" (Novi Com. Petrop., т. 4, стр. 154, 1758).

Сложив, получим, что сумма первых частей равенств, как сумма гоноэдров около одной точки, равна $4d$, а сумма величин ΣP_k будет общая сумма плоских углов многогранника ΣP, т. е. $4d = n \cdot 2d - \frac{\Sigma P}{2}$, откуда $\Sigma P = 4d(n-2)$.

Примечание. Тот же результат получим, если гоноэдр об m граней примем за $m-2$ тригоноэдра;[23] будем означать истинные суммы плоских углов со значками, получаем

$$D_1 = 2d - \frac{\Sigma P_1'}{2};$$

$$D_2 = 2d - \frac{\Sigma P_2'}{2};$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$D_{m-2} = 2d - \frac{\Sigma P_{m-2}'}{2}.$$

Складывая, получим $G_{m-2} = 2d(m-2) - \frac{\Sigma P'}{2}$. Хотя по виду величина эта и отличается от $2d - \frac{\Sigma P_k}{2}$, но легко видеть, что в действительности обе эти величины равны между собою. В самом деле, мы знаем, что истинная сумма плоских углов больше кажущейся на $(m-3)4d$, т. е. $\Sigma P' = \Sigma P_k + (m-3)4d$. Подставив эту величину, получаем $G_{m-2} = 2d(m-2) - \frac{\Sigma P_k + (m-3)4d}{2} = 2d - \frac{\Sigma P_k}{2}$.

Этот результат очевиден и a priori, так как на самом деле мы вместо данного можем взять другой многогранник, относящийся к тому же виду, но все углы которого тригоноэдры.

Следствие a. Так как сумма углов трехугольника равна $2d$, то, принимая в соображение наше определение теоретического числа граней, мы на основании выведенной теоремы можем заключить, что *всякий многогранник, кажущееся число вершин которого есть n, имеет $2(n-2)$ теорети-*

ческих грани, или, еще проще, кажущееся число вершин многогранника определяет теоретическое число его граней (или, что все равно, число его теоретических граней). Отсюда легко получим и другие соотношения между частями многогранника. Означим кажущееся число вершин через n, а истинное — через n', действительное число граней — через f, а теоретическое — через f', кажущееся или действительное число ребер — чрез r, а теоретическое или истинное (смотря по тому, определяются ли эти числа в зависимости от теоретического числа граней или от истинного числа вершин) число ребер — через r'; наконец, наименование граней (в случае его однородности) — через m, а наименование гоноэдров (в случае его однородности) — через M. Получаем:

$$f' \cdot 2d = 4d(n-2),$$

откуда

$$f' = 2(n-2). \quad (1)$$

Обратно

$$n = 2 + \frac{f'}{2}. \quad (2)$$

Теоретическое число ребер определяется прямо

$$r' = \frac{3f'}{2} \quad (3)$$

и обратно

$$f' = \frac{2r'}{3}, \quad (4)$$

так как каждое ребро принадлежит зараз двум граням.

Из равенств (3) и (1) получаем $r' = \frac{3 \cdot 2(n-2)}{2}$,

или

$$r' = 3(n-2), \quad (5)$$

и обратно

$$n = \frac{r'}{3} + 2. \quad (6)$$

Каждый действительный m-угольник, распадаясь на треугольники, дает их $m-2$, причем является столько же новых ребер. Поэтому $f'-f=r'-r$ или

$$f'-r'=f-r. \tag{a}$$

Складывая равенства (4) и (6), получаем $n+f'=r'+2$, а принимая во внимание равенство (a), приходим к *формуле Эйлера*

$$n+f=r+2.$$[1]

Если все грани данного многогранника одноименные многоугольники, то нетрудно вывести общие формулы соотношения между действительными числами. В самом деле, сумма внутренних углов m-угольника равна $(m-2)\,2d$, а потому на основании только что выведенной теоремы имеем

$$f(m-2)\,2d=4d\,(n-2), \quad \text{или} \quad f=\frac{2\,(n-2)}{m-2}, \tag{7}$$

и обратно

$$n=2+\frac{(m-2)\,f}{2}. \tag{8}$$

Далее, прямо получаем

$$r=\frac{mf}{2}, \tag{9}$$

и обратно

$$f=\frac{2r}{m}. \tag{10}$$

Наконец, соединяя равенства (9) и (7), получаем

$$r=\frac{m\,(n-2)}{m-2}, \tag{11}$$

и обратно

$$n=2+\frac{r\,(m-2)}{m}. \tag{12}$$

---

[1] См. в приложении „О формуле Эйлера“ (стр. 113).

Подставив в формулы (7)—(12) $m = 3$, придем снова к формулам (1)—(6), которые имеют действительное значение для многогрнаников с трехугольными гранями; разница поэтому будет состоять только в том, что придется отбросить значки.

В случае, если все гоноэдры данного многогранника одноименны, мы придем к новым формулам, выражающим зависимость между действительными частями, а именно, на основании теоремы 12 нужно вместо f подставить n, и обратно, r оставить неизменным, а вместо m подставить M. Сделав это, получаем

$$n = \frac{2(f-2)}{M-2}, \tag{13}$$

и обратно

$$f = 2 + \frac{(M-2)n}{2}. \tag{14}$$

Затем

$$r = \frac{M(f-2)}{M-2}, \tag{15}$$

и обратно

$$f = 2 + \frac{r(M-2)}{M}. \tag{16}$$

Наконец,

$$n = \frac{2r}{M}, \tag{17}$$

и обратно

$$r = \frac{Mn}{2}. \tag{18}$$

В случае тригоноэдров получим

$$n = 2(f-2); \tag{19}$$

$$f = 2 + \frac{n}{2}; \tag{20}$$

$$r = 3(f-2); \tag{21}$$

$$f = 2 + \frac{r}{3}; \tag{22}$$

$$n = \frac{2r}{3}, \tag{23}$$

и наконец

$$r=\frac{3n}{2}. \tag{24}$$

По формулам (19)—(24) легко определить истинные числа частей какого угодно многогранника; только в этом случае вместо n и r нужно подставить n' и r', а число n', как мы знаем, определяется весьма просто. Видоизмененные таким образом формулы показывают нам, что наиболее постоянная величина, не изменяющаяся, пока не изменяются истинные числа частей, есть число f, а потому весьма естественно принять ее за основание классификации. На основании этого приходим к следующему определению.

Определение 17. Порядком данного многогранника называется совокупность всех многогранников, имеющих одно и то же (действительное) число граней.

Пример. Так, к порядку двенадцатигранников относятся правильный додекаэдр, ромбический додекаэдр, двойная гексагональная пирамида; в каждой из этих трех фигур имеется 12 граней, 20 истинных вершин, 30 истинных ребер, а истинная сумма плоских углов $72d$, хотя кажущиеся числа иные.

Следствие b.[24] Формула $\Sigma P=4d(n-2)$ может во многих случаях служить к определению невозможности существования некоторых многогранников. Например из нее видно, что невозможны многогранники с нечетным числом граней — многоугольников с нечетным числом сторон.

Следствие c.[25] Зная кажущееся и истинное число вершин данного многогранника, легко определить, сколько именно трехугольных граней слилось между собою для образования граней высшего наименования. Положим, например, кажущееся число вершин равно истинному, т. е. все углы тригоноэдры; тогда $f'-f=2(n-2)-\left(2+\frac{n}{2}\right)=\frac{3n}{2}-6,$[26] т. е. столько именно трехугольников слилось для образования граней высшего наименования; в случае сфеноида $n=4$ и $f'-f=0$;

в случае куба $n=8$ и $f'-f=6$ и т. д. В первом случае, значит, все грани должны быть трехугольники, а во втором слияние произошло столько раз, сколько в кубе граней, следовательно, все грани могут быть четырехугольниками, хотя, конечно, могут вообще быть и иные грани. Если кажущееся число вершин 6, а истинное 12, то получаем $f'=8$ и $f=8$, т. е. все грани должны быть трехугольники, и т. д.

Примечание. Мы видели уже, что, несмотря на разнообразие форм, принадлежащих одному и тому же виду, все они характеризуются тождественностью системы дополнительных гоноэдров и индивидуальностью типического представителя. Всякое малейшее изменение этой системы составляет уже изменение вида, т. е. переход к другому; ясно, что существует безграничное число видоизменений системы при условии постоянства числа заключающихся в ней граней, а это постоянство, как мы знаем, определяет собою один и тот же порядок. Очевидно, что мы из безграничного ряда видоизменений можем выбрать группы таких, которые будут иметь сходство в существенном; этим же существенным является то, какого именно наименования и расположения грани и гоноэдры типического многогранника, так как определение этих частей обусловливает и все другие изучаемые нами, а именно число ребер, число вершин, сумму плоских углов. На основании этого приходим к понятию нового члена классификации.

Определение 18. Родом данного многогранника называется совокупность видов многогранников, типические представители которых имеют одно и то же число граней, одинаково расположенных и одинакового наименования. Понятие одинакового расположения можно расширить в том смысле, чтобы под него подошло расположение частей двух симметричных фигур.

Примечание. Из определения рода следует, что все типические представители одного рода имеют одни и те

же числа для всех частей, соотношение которых подлежит нашему изучению, т. е. одно и то же число граней, вершин и ребер и ту же сумму плоских углов. Однако между порядком и родом существует еще естественный член классификации — семейство, к которому мы могли бы отнести все многогранники, удовлетворяющие тем же условиям, что и для рода, за исключением расположения частей, т. е. под семейством мы могли бы подразумевать совокупность родов, принадлежащих одному и тому же порядку, с одним и тем же (кажущимся) числом вершин, но с различным расположением элементов многогранника.

§ 22. Определение 19. Под соответственными точками в равных фигурах мы будем подразумевать такие, которые совместятся при совмещении самих фигур, а в фигурах симметричных — такие, которые расположатся симметрично, когда таким же образом мы поместим самые фигуры.

Определение 20. Равногранником или, проще, изоэдром[27] называется такой многогранник, все грани которого равны между собою (или симметричны).

Теорема 15. *Точки касания типических изоэдров*[28] *суть точки соответственные.*

В самом деле, всякий такой многогранник системою граней центральных углов разбивается на равномерные пирамиды, так как каждая из них имеет равные основания и равные высоты. Кроме того, каждые две смежные пирамиды имеют общую грань, а этому условию могут удовлетворять только равные во всех своих частях пирамиды, т. е. равные или симметричные; доказать это легко, обратившись к условиям образования такой пирамиды: нужно взять данную грань (основание), провести параллельно ей две плоскости по ту и другую ее стороны на расстоянии, равном высоте, и, приняв общее ребро (при основании) за ось вращения, найти точки пересечения траектории, описываемой вершиной вращаемой грани (общей) пирамиды с обеими плоскостями; хотя при этом и получатся четыре точки, но ясно, что только

две из них удовлетворяют поставленным условиям, так как основания перпендикуляров, опущенных из двух других точек, будут лежать вне грани. Если же пирамиды равны во всех своих частях, то ясно, что точки касания, т. е. основания высот, будут точки соответственные.

Следствие a. Из хода доказательства этой теоремы очевидно, что все соответственные точки граней типического изоэдра, в том числе и вершины этих граней, находятся на одинаковом расстоянии от центра, т. е. лежат на одной и той же шаровой поверхности. При этом мы можем различать три случая: 1) когда все вершины находятся на одной и той же шаровой поверхности; в этом случае типический многогранник есть в то же время и подтипический некоторому виду;[29] 2) когда некоторые вершины одной и той же грани находятся на одной и той же шаровой поверхности; этот случай не представляет для нас особого значения; 3) когда все вершины находятся на разных шаровых поверхностях; это случай общий.

Следствие b. Из предыдущего следствия вытекает, что для того, чтобы найти центр шара, вписанного в типическом изоэдре, нужно взять какие-нибудь четыре соответственные точки на его гранях, например, четыре соответственные вершины, и найти центр шаровой поверхности, проходящей через эти точки.

Следствие c. Если гоноэдры подтипического [изоэдра] могут быть вписаны в конусе, т. е. если они гоноэдры подтипические, то грани типического многогранника типические многоугольники. В самом деле, при этом условии центральные гоноэдры будут типичны (теорема 21 отдела I), т. е. к ним можно провести касательный конус. Ось этого конуса проходит через точку касания грани типического (примечание к теореме 12), и, следовательно, сама грань типического рассечет этот конус и центральный гоноэдр по кругу и касательному к нему периметру многоугольника.

Определение 21. Равноугольником или, проще, изогоном называется такой многогранник, все гоноэдры которого равны или симметричны.

Теорема 16. *Многогранник, подтипический изоэдру, есть изогон, и наоборот, типический, соответствующий изогону, есть изоэдр.*

В самом деле, из примечания к теореме 12 мы видим, что, чтобы получить гоноэдр, вписанный в шаре и соответствующий грани, касательной к шару, нужно вершины этой грани соединить с центром шара и из точки касания провести плоскости, перпендикулярные к проведенным прямым, и наоборот, чтобы по гоноэдру, вписанному в шаре, определить соответствующую грань типического многогранника, нужно из центра провести прямые, перпендикулярные к граням гоноэдра, и найти точки пересечения этих прямых с плоскостью, касательною к шару при вершине гоноэдра; значит, равным граням типического изоэдра соответствуют равные гоноэдры взаимного изогона, и наоборот.

На основании этой теоремы мы можем вывести для изогонов параллельно следствия, выведенные для изоэдров, а именно:

Следствие a. Существует столько же родов граней у изогона, сколько родов гоноэдров у соответственного изоэдра; все однородные грани подтипического изогона находятся на равном расстоянии от центра, но, однако, при этом могут встретиться три случая: 1) когда все грани изогона находятся на одинаковом расстоянии от центра; в этом случае изогон есть в то же время и типический многогранник для некоторого вида; 2) когда только некоторые из неоднородных граней находятся на одинаковом расстоянии от центра, т. е. касательны к одной и той же шаровой поверхности; этот случай не имеет для нас особого значения; 3) когда все неоднородные грани находятся на разных расстояниях от центра; это случай общий.

Следствие b. Чтобы найти центр шара, описанного около изогона, можно взять центры кругов, описанных около

граней какого-нибудь одного рода, и через полученные четыре подобные точки провести шаровую поверхность.

Следствие с. Грани подтипического изогона — подтипические многоугольники, что очевидно само по себе.

Следствие d. Всякому изогону, грани которого правильные многоугольники, а гоноэдры которого могут быть вписаны в конус, соответствует некоторый типический изоэдр с правильными гоноэдрами. В самом деле, так как грани данного изогона правильные многоугольники, то, значит, все его ребра равны между собою; и потому около одной из его вершин мы можем описать шаровую поверхность, проходящую через концы всех ребер соответствующего гоноэдра; так как притом гоноэдр может быть вписан в конус, то все эти точки будут находиться на окружности. Проведя шаровую поверхность через эту окружность и через взятую вершину гоноэдра, легко убедимся, что эта поверхность проходит и через все вершины граней взятого гоноэдра, а проследив положение шаровой поверхности далее, нетрудно убедиться, что она проходит и вообще через все вершины изогона. Вторая часть следствия непосредственно вытекает из теоремы 16 и примечания к теореме 12. Если углы данного изогона тригоноэдры, то, чтобы он был подтипическим, остается одно условие — правильность его граней.

§ 23. Выведя общие условия образования многогранников, обратимся теперь к важнейшим частным случаям, а именно к тем многогранникам, у которых одноименны или все грани, или все гоноэдры, или же, наконец, одновременно и те, и другие.

Теорема 17. *Существует ограниченное число групп типических многогранников с одноименными гранями и гоноэдрами, и именно только те, которые принадлежат к одному роду с правильными.*

Чтобы вывести все многогранники, удовлетворяющие этому условию, нужно совместно решить уравнения (7)—(12) и (13)—(18). Легко видеть, что все эти 12 уравнений

сводятся к трем, так как каждая группа уравнений выводится из двух, а в полученных четырех уравнениях можно принять одно общее, а именно $n+f=r+2$. Но так как всего в эти уравнения входит 5 переменных, то ясно, что две из них остаются неопределенными и могут быть заданы произвольно. Приведем все эти уравнения к одному с тремя переменными, за которые примем величины M, m и f. Для этого приравняем друг другу, например, уравнения (9), (11) и (18), и выведем из них величину f; получаем $f=\frac{4M}{2(M+m)-mM}$. Так как обе величины m и M суть числа целые не меньше 3, то мы и зададимся рядом таких чисел.

Первый случай. $M=3$, $m=3$. В этом случае $f=4$; получаем род правильного тетраэдра.

Второй случай. $M=4$, $m=3$. В этом случае $f=8$; получаем род правильного октаэдра.

Третий случай. $M=5$, $m=3$. В этом случае $f=20$; получаем род правильного икосаэдра.

Четвертый случай. $M=6$, $m=3$. В этом случае $f=\infty$; приходим к шару. Очевидно, не можем задаться $M>6$.

Пятый случай. $M=3$, $m=4$. В этом случае $f=6$; приходим к роду куба.

Шестой случай. $M=4$, $m=4$. В этом случае $f=\infty$; опять приходим к шару. Очевидно, не можем задаться $M>4$.

Седьмой случай. $M=3$, $m=5$. В этом случае $f=12$; приходим к роду правильного додекаэдра. Легко убедиться, что задаваться $M>3$ нельзя, ибо придем к отрицательным числам.

Примечание. К этому же выводу мы можем притти и другим путем. В самом деле, у таких многогранников двойное число ребер должно делиться нацело, как на число вершин, давая в частном наименование гоноэдров,[30] так и на число граней, давая в частном наименование граней.[31] Применяя известные формулы, получим:

в первом случае[32]

$$M=\frac{2m(n-2)}{m-2}:n=\frac{2m(n-2)}{n(m-2)};$$

во втором случае[33]

$$m=\frac{2M(f-2)}{M-2}:f=\frac{2M(f-2)}{f(M-2)}.$$

Подставляя в эти формулы вместо m или M числа 3, 4, 5, мы получим разные возможные значения для n или f. Так, в случае $m=3$, получаем $M=\frac{6(n-2)}{n}=6-\frac{12}{n}$, т. е. n может быть 4 (тетраэдр), 6 (октаэдр) и 12 (икосаэдр) и ∞ (шар); в случае $m=4$ имеем $M=\frac{4(n-2)}{n}=4-\frac{8}{n}$, т. е. n может быть 4 (так как M в этом случае равно 2, то это решение не означает многогранника, а только одну четырехугольную грань) и 8 (куб), а также ∞ (шар). Наконец, в случае $m=5$, $M=\frac{10(n-2)}{3n}$, чему удовлетворяет только одно решение $n=20$ (додекаэдр). Подобный же результат получаем и из второй формулы.

Следствие. Ряд родов, к которому относятся правильные многогранники, несомненно ряд замечательный; мы должны искать в нем правильности и легко находим ее, если исключим тетраэдр, который уже по тому одному выделяется из всех прочих, что составляет единственный род во всем порядке. Однако мы получаем эту правильность только в том случае, если сопоставим истинные, а не кажущиеся числа.

В самом деле:

числа граней будут 4,	**6**	**8**	**12**	20
первая разность		**2**	**4**	**8**
вторая разность		**2**	**4**	
третья разность		**2**		
кажущиеся числа ребер будут 6,	12	12	30	30
первая разность		0	18	0

истинные числа ребер будут 6,	**12**		**18**		**30**		**54**
первая разность		**6**		**12**		**24**	
вторая разность			**6**		**12**		
третья разность				**6**			
истинные числа вершин будут 4,	**8**		**12**		**20**		**36**
первая разность		**4**		**8**		**16**	
вторая разность			**4**		**8**		
третья разность				**4**			
истинные величины суммы плоских углов будут $8d$,	**24**d		**40**d		**72**d		**136**d
первая разность		**16**d		**32**d		**64**d	
вторая разность			**16**d		**32**d		
третья разность				**16**d			

Таким образом ряд куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр естествен во всех отношениях.

§ 24. Переходя к изучению многогранников с одноименными гранями или одноименными гоноэдрами, нам прямо приходится пользоваться формулами (1)—(24) и подставлять вместо m и M частные числа. При этом выражать зависимость частей мы будем по отношению к числу граней, как наиболее существенному признаку, и числа брать кажущиеся. Предварительно, однако, мы определим, не существует ли предел наименования граней таких многогранников.

Теорема 18. *Высший предел наименования граней фигур с одноименными гранями есть пять.*[1])

Будем обозначать большими буквами числа частей, относящихся к подтипическим многогранникам; соотношение между m и M понятно само собою.

[1]) Выводы подобного рода делаются, начиная с Лежандра (см., например, его „Elements de Geométrie", изд. 15, стр. 307, 1862), и основываются на формуле $2A = 3a + 4b + 5c + \ldots$, где a — число трехугольных, b — четырехугольных, c — пятиугольных граней, а A — число ребер, или, означив через S число вершин, по формуле $2S = 4 + a + 2b + 3c + \ldots$

Итак, рассмотрим многогранник, коего грани m-угольники.

Число его граней есть $f = \frac{2(n-2)}{m-2}$. Строим подтипический измененный; получаем $F = 2(N-2)$, так как все его грани трехугольники; но $F = n'$, а $N = f$; поэтому

$$n' = 2\left[\frac{2(n-2)}{m-2} - 2\right] = \frac{4(n-m)}{m-2}. \tag{25}$$

Подставляя последовательно $m = 3$, 4, 5 и т. д., получим: для трехугольных граней

$$n' = 4n - 12; \tag{25a}$$

для четырехугольных граней

$$n' = 2n - 8; \tag{25b}$$

для пятиугольных граней

$$n' = \frac{4n}{3} - \frac{20}{3}. \tag{25c}$$

Наконец, для шестиугольных граней мы получили бы $n' = n - 6$ — результат невозможный (конечно, кроме случая $n = \infty$), так как истинное число вершин не может быть меньше кажущегося, а потому пятиугольники представляют высший предел наименования граней таких многогранников.

Следствие. Отсюда следует, что при изучении таких многогранников достаточно рассмотреть 3 случая, а именно: 1) $m = 3$, 2) $m = 4$ и 3) $m = 5$. Многогранники с трехугольными гранями мы назовем для сокращения тригональными, с четырехугольными гранями — тетрагональными, и с пятиугольными — пентагональными.

Для *тригональных многогранников* имеем

$$n = 2 + \frac{f}{2}; \tag{8a}$$

$$r = \frac{3f}{2}; \tag{9a}$$

$$\Sigma P = f \cdot 2d. \tag{26a}$$[31]

Для *тетрагональных многогранников* имеем

$$n = 2 + f; \tag{8b}$$

$$r = 2f; \tag{9b}$$

$$\Sigma P = f \cdot 4d. \tag{16b}$$

Для *пентагональных многогранников* имеем

$$n = 2 + \frac{3f}{2}; \tag{8c}$$

$$r = \frac{5f}{2}; \tag{9c}$$

$$\Sigma P = f \cdot 6d. \tag{26c}$$

Примечание. Ясно, что формулы (26a), (26b) и (26c) могут быть выведены непосредственно, не прибегая к теореме 14 и формулам (8) и (9).

Теорема 19. *Высший предел наименования гоноэдров фигур с одноименными углами есть пять.*

Пусть гоноэдры данной фигуры наименования M. Число вершин $N = \frac{2(F-2)}{M-2}$.[35] Строим соответственный типический измененный. Для последнего $n = 2(f-2)$; но $n = F'$, а $f = N$, а потому

$$F' = \frac{4(f-M)}{M-2}. \tag{25b}$$

Подставляя $M = 3$, $M = 4$, $M = 5$ и т. д. и называя многогранники соответственно тригоноэдрическими, тетрагоноэдрическими и т. д., получим:

для *тригоноэдрических многогранников*

$$F' = 4F - 12; \tag{25e}$$

для *тетрагоноэдрических многогранников*

$$F' = 2F - 8; \tag{25f}$$

для пентагоноэдрических многогранников

$$F' = \frac{4F}{3} - \frac{20}{3}. \qquad (25g)$$

Наконец, для гексагоноэдрических многогранников мы получили бы $F' = F - 6$ — результат невозможный (конечно, кроме случая $F' = \infty$), так как теоретическое число граней не может быть меньше действительного. Таким образом, пентагоноэдры представляют высший предел углов таких многогранников.

Примечание. На эту теорему можно смотреть так же, как на непосредственное следствие теорем предыдущей и 12, так как, если бы возможен был типический многогранник с гоноэдрами высшего чем пять наименования, то возможен бы был и подтипический многогранник с наименованием граней высшим чем пять.

Следствие. Поэтому, при выводе формул, относящихся к этим многогранникам, приходится ограничиться тремя случаями: 1) $M=3$, 2) $M=4$ и 3) $M=5$.

Для *тригоноэдрических многогранников* имеем

$$n = 2(f-2); \qquad (13a)$$

$$r = 3(f-2); \qquad (15a)$$

$$\Sigma P = (f-3)\,8d. \qquad (27a)$$

Для *тетрагоноэдрических многогранников* имеем

$$n = f-2; \qquad (13b)$$

$$r = 2(f-2); \qquad (15b)$$

$$\Sigma P = (f-4)\,4d. \qquad (27b)$$

Для *пентагоноэдрических многогранников* имеем

$$n = \frac{2(f-2)}{3}; \qquad (13c)$$

$$r = \frac{5(f-2)}{3}; \qquad (15c)$$

$$\Sigma P = \frac{f-5}{3} \cdot 8d. \qquad (27c)$$

§ 25. Ясно, что рассмотренными в предыдущем параграфе многогранниками исчерпываются все возможные изоэдры и изогоны. Мы видели, что при центре изогонов можно построить систему равных гоноэдров по числу вершин. В случае, если данный изогон подтипический и система построена при его центре, то она тожественна с системою центральных гоноэдров типического изоэдра. Поэтому нетрудно построить все возможные типические изоэдры, исходя из системы дополнительных гоноэдров всех возможных изогонов. С другой стороны, сумма плоских углов при вершине изогона есть величина постоянная, а из нее нетрудно вывести и самую величину дополнительного гоноэдра. Теперь мы выведем эту величину.

Теорема 20. *Гоноэдр, дополнительный гоноэдру какого угодно изогона, равен $2d$, умноженным на единицу без дроби, числитель которой — разность числа граней и наименования гоноэдра, а знаменатель — разность того же числа граней и двух.*

В самом деле, сумма плоских углов гоноэдра изогона равна общей сумме плоских углов, деленной на число вершин. Поэтому, сумма эта для тригоноэдрического изогона будет[36] $\frac{f-3}{f-2}4d$, для тетрагоноэдрического $\frac{f-4}{f-2}4d$, а для пентагоноэдрического $\frac{f-5}{f-2}4b$, а так как дополнительный гоноэдр равен[37] $2d-\frac{\Sigma P}{2}$, то

для *тригоноэдрического изогона* получаем

$$G_d = 2d\left(1-\frac{f-3}{f-2}\right); \tag{28a}$$

для *тетрагоноэдрического изогона* получаем

$$G_d = 2d\left(1-\frac{f-4}{f-2}\right); \tag{28b}$$

для пентагоноэдрического изогона получаем

$$G_d = 2d\left(1 - \frac{f-5}{f-2}\right). \tag{28c}$$

Теорема 21. *Если существует какой-нибудь изогон с какими-нибудь гранями, то существует и другой с гранями одинакового наименования, но правильными.*

Построим систему дополнительных гоноэдров данному изогону. Так как плоские и двугранные углы изогона — какие-нибудь и могут быть различны, то, значит, вообще различны и плоские, и двугранные углы дополнительного гоноэдра, хотя в частных случаях некоторые или все углы могут быть и равны друг другу. Так как эти величины гоноэдров, могущих складываться в пространстве, вполне определяют закон этого сложения (нужно накладывать равный плоский угол на равный), то, значит, число складывающихся около каждого ребра двугранных углов есть величина вполне определенная и постоянная для каждого соответственного ребра. Отсюда следует, что и наименование граней данного изогона, соответственных данным ребрам (т. е. к ним перпендикулярных), есть также величина определенная и постоянная для каждого соответственного ребра; другими словами, в изогоне имеется столько различных граней, сколько в его гоноэдре плоских углов.

Итак, пусть наименование граней будет k, l, m, ... Если вместо каких-нибудь граней с этими наименованиями мы возьмем правильные многоугольники, то от этого число граней, конечно, не изменяется, и так как во всех вершинах сходятся одинаковые углы правильных многоугольников, то ясно, что и сумма плоских углов при вершине остается неизменною, и следовательно, данная фигура остается изогоном и при сделанном изменении.

Следствие а. На основании этой теоремы и следствия „d“ теоремы 16, мы заключаем, что если существует какой-нибудь изогон, угол которого может быть вписан

в конусе, то существует и подтипический, принадлежащий тому же виду и даже разновидности.

Следствие b. На основании этой теоремы мы можем выразить формулы (28) в другом виде, а именно в зависимости от наименования граней. Пусть эти наименования будут i, j, k, l и m; приняв грани за правильные многоугольники, получим, что сумма плоских углов около одной вершины будет $2d\cdot\left(\frac{i-2}{i}+\frac{j-2}{j}+\frac{k-2}{k}+\frac{l-2}{l}+\frac{m-2}{m}\right)$, и, следовательно, величина дополнительного гоноэдра будет

$$G_d=2d-d\left(\frac{i-2}{i}+\frac{j-2}{j}+\frac{k-2}{k}+\frac{l-2}{l}+\frac{m-2}{m}\right)=$$

$$=2d\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}-\frac{3}{2}\right). \qquad (29)$$

Число же вершин данного изогона получится, если на эту величину мы разделим $4d$, т. е.

$$n=\frac{2}{\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}-\frac{3}{2}}. \qquad (30)$$

В частных же случаях получаем
для *тригоноэдрических изогонов*

$$n=\frac{2}{\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}}; \qquad (30a)$$

для *тетрагоноэдрических изогонов*

$$n=\frac{2}{\frac{1}{j}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}-1}; \qquad (30b)$$

для *пентагоноэдрических изогонов*

$$n=\frac{2}{\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}-\frac{3}{2}}. \qquad (30c)$$

§ 26. Теорема 22. *Сумма двугранных углов многогранника без суммы его гоноэдров равна двум прямым, умноженным на число граней без двух.*[1])

Восставим в каждой вершине многогранника перпендикуляры ко всем граням, пересекающимся в этой вершине; направление перпендикуляров примем от вершины наружу. Рассмотрим какую-нибудь вершину N-гоноэдра. При этой вершине сходится $2N+2$ следующих гоноэдров: a) внутренний гоноэдр многогранника; b) гоноэдр, образуемый перпендикулярами, и следовательно, дополнительный первому; c) N вертикальных гоноэдров, образуемых гранью с перпендикуляром, к ней восставленным; d) N вертикальных гоноэдров, образуемых ребром многогранника с двумя перпендикулярами к граням, которые пересекаются по этому ребру. Обозначим гоноэдры a) через G; гоноэдры b) через A; гоноэдры c) будут равны соответственно половине плоского угла (P) данного гоноэдра многогранника и, наконец, гоноэдры d) будут равны соответственно дополнениям до $2d$ двугранного угла (B). Так как сумма всех гоноэдров около одной точки равна $4d$, то имеем

$$4d = A_1 + G_1 + \frac{\Sigma P_1}{2} + \frac{\Sigma(2d - B_1)}{2}.$$

Точно так же для второй вершины получаем

$$4d = A_2 + G_2 + \frac{\Sigma P_2}{2} + \frac{\Sigma(2d - B_2)}{2};$$

. . . .

$$4d = A_n + G_n + \frac{\Sigma P_n}{2} + \frac{\Sigma(2d - B_n)}{2}.$$

---

[1]) Теорема эта была независимо выведена многими авторами, а именно Франсе (Français, Ann. de math. par Gergonne 3, стр. 189), Брианшоном (Brianchon. Sur les polyèdres. Journ. de l'Ec. polyt., тетр. 25, стр. 317), наконец, Грунертом (Grunert, Crelle Journ., т. 5, стр. 41), как об этом было упомянуто в [подстрочном] примечании к теореме 1, которая представляет собою лишь частный случай. Здесь приводится, впрочем, независимый вывод.

Складывая, получаем

$$4d \cdot n = \Sigma A + \Sigma G + \frac{\Sigma P}{2} + 2 \cdot \frac{\Sigma (2d - B)}{2}.$$

Здесь сумму гоноэдров d) мы удваиваем, так как, очевидно, каждый гоноэдр этого разряда будет повторяться два раза на концах каждого ребра многогранника; ΣA как сумма гоноэдров, дополнительных гоноэдрам данного многогранника, равна $4d$. Далее, как уже известно, $\Sigma P = 4d(n-2)$. Что касается $\Sigma(2d - B)$, то очевидно, что в эту сумму входит столько членов, сколько ребер в данном многограннике; поэтому $\Sigma(2d - B) = 2d \cdot r - \Sigma B$.

Подставляя все эти значения, получаем

$$4d \cdot n = 4d + \Sigma G + 2d(n-2) + 2d \cdot r - \Sigma B$$

или

$$\Sigma B - \Sigma G = 2d(2 + n - 2 + r - 2n) = 2d(r - n) = 2d(f - 2),$$

что и требовалось доказать.[38]

С л е д с т в и е а. Означив через $\mathfrak{N}$ среднее наименование гоноэдра многогранника, мы можем написать (по теореме 17 I отдела) $\Sigma G = \Sigma B - nd(\mathfrak{N} - 2)$. Сравнивая это выражение с только что полученным, будем иметь $2d(r-n) = nd(\mathfrak{N} - 2)$, откуда $\mathfrak{N} = \frac{2r}{n}$ — выражение, указывающее, какого наименования могут быть гоноэдры. Например, для ромбического додекаэдра имеем $r = 24$, $n = 14$; следовательно, $\mathfrak{N} = \frac{48}{14} = 3\frac{3}{7}$, откуда заключаем, что из семи гоноэдров три могут быть тетрагоноэдрами, если остальные тригоноэдры.

Это выражение показывает также, что условие, необходимое для одноименности всех гоноэдров многогранника, есть $\frac{2r}{n} = 3$, 4 или 5, что уже нами применялось.

Впрочем, это соображение очевидно и само по себе, так как сумма наименований всех гоноэдров есть двойное число ребер. Отсюда ясно, что изложенную теорему еще проще

вывести из этого соотношения обратным аналитическим процессом, а именно: $\Sigma G = \Sigma B - nd(\mathfrak{R} - 2)$ или $\Sigma B - \Sigma G = nd(\mathfrak{R} - 2) = nd\left(\frac{2r}{n} - 2\right) = 2d(r - n) = 2d(f - 2)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О формуле Эйлера (к стр. 94)

Эта основная формула учения о телесных фигурах привлекла особое внимание многочисленных математиков, представивших самые разнообразные ее доказательства. Внимание это было возбуждено особенно тем обстоятельством, что в своей первой статье (Elementa doctrinae solidorum. Novi Com. Petrop., 1758) Эйлер выводил ее как бы ощупью, а лишь во второй (Demonstratio nonnularum insignium proprietatum quibus, там же) дал ей общее, хотя и тяжеловатое доказательство.

Бальцер (B a l t z e r. Die Elemente der Mathematik. Изд. 5 (2), стр. 213) предполагает, что соотношение, выражаемое этой формулой, было известно уже древним, и именно на том основании, что Архимед указал на ряд так называемых полуправильных многогранников (т. е. особых типических изоэдров и подтипических изогонов). Тот же Бальцер нашел намеки на это соотношение в „Oeuvres inédites de Descartes par M. Foucher de Careil“, изданных в 1860 г., II, стр. 214 (и указал на это в своей статье в Monatsb. d. Berl. Ac., стр. 1043, 1861).

Как бы то ни было, формула эта получила распространенную известность лишь после упомянутого уже вывода Эйлера.

Лежандр дал ей доказательство, основанное на том же начале, что и вывод более общей формулы, относящейся к многогранникам высшей степени (см. его „Elements de Géometrie“, изд. 15, 1862, стр. 226). Ввиду того, что метод этот легко приложим для гораздо более широких обобщений, я считаю его наиболее рациональным, хотя Шульц фон Штрасиницкий иного мнения и считает его неудовлетворительным (Crelle Journ., т. 14, стр. 83).

Затем идет целый ряд доказательств, некоторые из которых допускают более широкие обобщения в других направлениях, как, например, доказательство Коши (C a u c h y, Journ. de l'Ec. polyt., тетр. 16, стр. 77), Грунерта (G r u n e r t, Crelle Journ., т. 2, стр. 367), Льюильер (L'H u i l i e r, Ann. de math. par Gergonne, т. 3, стр. 160) и т. п. Другие же отличаются особенной простотой. Наиболее простым является доказательство профессора Г. Тиме, которое мы приведем здесь целиком: „Для того, чтобы перейти по ребрам многогранника от одной его вершины

ко всем другим, необходимо и достаточно $e-1$ ребер (e — число вершин). Когда многогранник будет разрезан таким образом, то для того, чтобы отделить еще все грани, необходимо сделать разрез по всем другим ребрам. Для разделения на f частей необходимо $f-1$ разрезов по ребрам. Следовательно, многогранник имеет $e-1+f-1$ ребер" (Baltzer, ук. соч.).

Доказательства даны также Штейнером (Steiner, Crelle Journ., т. 1, стр. 364), Роте (Rothe, Kastner Arch. der ges. Nat., т. 4), Штаудом (Staudt, Géometrie des Lage. 1847, стр. 49), Аугустом (August, Progr. d. Köln. Realgymn., 1854, опр., 4), К. Жорданом (C. Jordan, Crelle Journ., т. 66, стр. 36), Бугаевым (Мат. сб., т. 2, 1862), наконец, Бальцером (ук. соч.).

Можно было бы, пожалуй, еще увеличить этот список, но уже и в нем есть лишь варианты в сущности одного и того же способа.

Отношение между элементами многогранника, выражаемое уравнением $f+n=r+2$, можно представить и графически, как это сделано на фиг. 65, где горизонтальные черты выражают последовательно число ребер (для ясности через каждые 5 и 10 делений проведен особый пунктир); тонкие параллельные черты, проведенные слева направо и сверху вниз, выражают последовательно число вершин (как обозначено цифрами), а третий ряд параллельных черт выражает собою число граней (также согласно обозначению). Четные черты последней системы сделаны толстыми по той причине, что, как будет указано ниже, многогранники, сюда относящиеся, принадлежат I, а остальные II классу.

Кроме того, на фигуре проведено еще 6 толстых черт, означенных $m=3$, $m=4$ и $m=5$, а также $M=3$, $M=4$ и $M=5$, где m — наименование граней, а M — гоноэдров. Всякое пересечение этих трех систем выражает собой возможный многогранник или группу многогранников, но только в пределах между чертами $m=3$ и $M=3$, так как за этими пределами решения обозначали бы многогранники, имеющие наименование граней или гоноэдров меньше чем три.

Понятно, что все возможные многогранники с одинаковым наименованием граней или гоноэдров будут соответствовать проведенным шести толстым чертам. Пять пересечений этих черт будут соответствовать тем многогранникам, которые одновременно имеют одинаковое наименование граней и гоноэдров и, следовательно, одинаковых в этом отношении с правильными многогранниками.

Однако в этой схеме, основания которой даны Бретоном (Breton, C. r., т. 51, стр. 723, 1860), отдельные точки не только не выражают собою какого-нибудь единичного многогранника, но, напротив того, соответствуют весьма различным. Возьмем для примера многогранник, состоящий из трехугольных граней, имеющий 8 граней и, следовательно,

12 ребер и 6 вершин. Сумма наименований его гоноэдров равна двойному числу ребер, т. е. 24, и мы получаем для этого единственного по схеме Бретона решения следующие случаи, в которых числа обозначают наименования гоноэдров: 1) 5 5 4 4 3 3, 2) 5 4 4 4 4 3, 3) 4 4 4 4 4 4.

И чем больше число граней в многограннике, тем больше существует решений соответственно одному и тому же решению по схеме Бретона. Поэтому схема эта далека от того, чтобы выразить собою всевозможные отношения многогранников.

Глава 5

ВЫВОД ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ИЗОГОНОВ И ТИПИЧЕСКИХ ИЗОЭДРОВ

§ 27. Метод, которому мы будем следовать при этом выводе, состоит в том, чтобы, определив все возможные изогоны с гранями — правильными многоугольниками, так называемые особые изогоны, в каждом частном случае рассмотреть, какому изменению (регулированию) могут быть подвергнуты стороны или углы этих граней для того, чтобы многогранник оставался изогоном. Затем, построив соответственные типические многогранники, мы получим соответствующие изоэдры.

Не изменяя плоских углов граней, мы во многих случаях можем изменить величину некоторых сторон, т. е. ребер, изогона, и при этом изогон может оставаться вписанным в шаре, если таким был до изменения. Такие измененные грани будут равноугольники, а чтобы они могли быть вписанными в круге (для того чтобы сам многогранник мог быть вписанным в шаре), нужно, чтобы при изменении длины ребер соблюдали некоторое условие. Условие это состоит в том, чтобы две смежные стороны, прилегающие к любой стороне равноугольника, были равны между собою; в самом деле, дуги, на которые опираются стороны двух смежных углов как равных и вписанных в круге, равны между собою; притом, так как в обеих этих дугах есть общая часть, то и остающиеся за ее вычетом части, т. е. дуги, стягиваемые

двумя сторонами, прилегающими к одной и той же, тоже равны между собой, а следовательно, и сами стороны равны. Такие многоугольники мы будем называть дигональными;[1]) первый из них есть прямоугольник и происходит из квадрата через растяжение одной из пар противоположных сторон; второй есть дитригональный равноугольник, т. е. правильный шестиугольник с последовательно через одну растянутыми сторонами; третий есть дитетрагональный равноугольник, происходящий таким же образом из правильного восьмиугольника, и т. д. Соответствующие дигональным описанные около круга, т. е. типические, многоугольники будут, как легко видеть, равносторонники, и их принято называть дигонами: прямоугольнику соответствует ромб, дитригональному равноугольнику — дитригон и т. д.

Теперь посмотрим, в каких случаях можно изменять величину плоских углов изогона. Если при какой-нибудь вершине мы увеличим или уменьшим один из плоских углов, то ясно, что на ту же величину мы должны уменьшить или увеличить другой; так как граней существует столько родов, сколько их сходится при одной вершине гоноэдра, и так как углы граней разного наименования разные, то ясно, что мы не можем таким образом регулировать углы разноименных граней. Однако не всегда можно регулировать и углы одноименных граней, если таковые встречаются при одной вершине. Допустим, например (фиг. 38), что около вершин правильного трехугольника a_1 сходятся два разные угла одноименных граней. Впишем этот трехугольник в шар и опустим из центра последнего перпендикуляры на одноименные грани b_1, c_1 и d_1. Так как двугранные углы, образуемые этими гранями, равны, то гоноэдр, полученный при центре, будет правильный,

---

[1]) Некоторые авторы называют их *полуправильными*. Но едва ли такое название можно считать (несмотря на его распространенность) удачным, так как и те, которые называются дигонами, например дитригон, дитетрагон, как имеющие равные стороны, в равной мере заслуживают названия полуправильных.

а следовательно, и продолженные одноименные грани образуют правильный гоноэдр. Вершина этого гоноэдра, очевидно, должна находиться на перпендикуляре OA, опущенном из центра на грань a_1, а соединив какую-либо точку этого перпендикуляра с вершинами трехугольника и продолжив эти прямые, мы всегда около вершин трехугольника получим два равных плоских угла, и следовательно, вышеупомянутого допущения сделать нельзя.

Это соображение одинаково применяется ко всем подобным случаям, какой бы правильный многоугольник мы ни взяли. Отсюда следует, что не всегда можно регулировать и углы однородных граней, сходящихся при одной вершине. Поэтому остается только два случая, в которых мы можем производить это регулирование, а именно: a) когда при одной вершине сходится не меньше трех углов трехугольника, и b) когда при одной вершине сходится не меньше двух вершин четырехугольника. В этих случаях, очевидно, мы можем брать трехугольники с какими угодно углами и четырехугольники с какой угодно парой смежных углов, лишь бы их сумма была равна $2d$.

К этим условиям образования изогонов прибавим еще два следующих: a) если в число граней тригоноэдра изогона входит многоугольник с нечетным числом сторон, то две другие грани должны быть одноименны; другими словами, при одной вершине тригоноэдра не может сходиться два угла, принадлежащих многоугольникам с нечетным числом сторон, а если имеется один из таких углов, то оба других, принадлежащих граням с четным числом сторон, должны в то же время принадлежать одноименным граням. Это соображение выходит из того, что, если приложим ко всем ребрам без одного поочередно неодноименные грани, то какую бы из этих граней мы ни приложили к последнему ребру, во всяком случае не получим изогона. Наконец, b) существует бесчисленное множество индивидуальных изогонов, принадлежащих одному виду, если гоноэдры трехгранные;

если же гоноэдры — высшего наименования, то изогоны уже не представляют индивидуальностей, а только пределы таких индивидуальностей, а именно формы, вписанные в шаре. Доказательство этому мы увидим при разборе всех частных случаев.

§ 28. I. Тригоноэдрические изогоны и тригональные изоэдры[1])

Общая формула для таких изогонов есть[39]

$$n = \frac{2}{\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{2}}.$$

Легко определить, что здесь возможно десять случаев:

1) $k = l = m = 3$; в этом случае $n = 4$.

2) $k = 3$; $l = m = 4$; в этом случае $n = 6$. Этот случай замечателен тем, что дает общее решение; в самом деле $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, а следовательно, каково бы ни было число k, всегда получим $n = 2k$.

3) $k = 3$; $l = m = 6$; в этом случае $n = 12$.

4) $k = 3$; $l = m = 8$; в этом случае $n = 24$.

5) $k = 3$; $l = m = 10$; в этом случае $n = 60$.

Наконец, изогон с конечным числом граней и с $k = 3$, а $l = m > 10$ существовать не может.

6) $k = 4$; $l = m = 6$; в этом случае $n = 24$.

7) $k = 4$; $l = 6$ и $m = 8$; в этом случае $n = 48$.

8) $k = 4$; $l = 6$ и $m = 10$; в этом случае $n = 120$.

Наконец, случаи $l = m \geqslant 8$ невозможны при конечном числе граней.

9) $k = l = m = 5$; в этом случае $n = 20$.

10) $k = 5$; $l = m = 6$; в этом случае $n = 60$.

Наконец, случаи $l = m \geqslant 8$ невозможны.

---

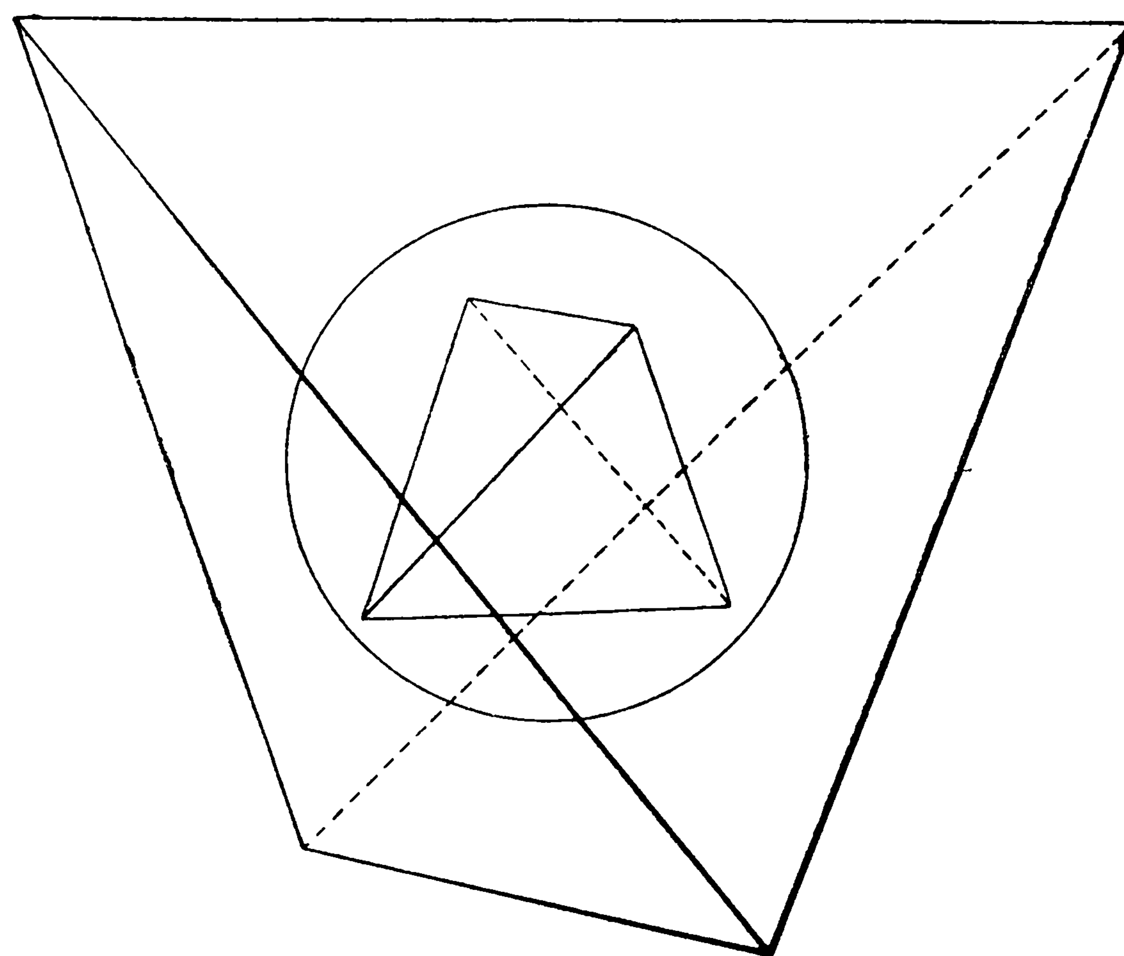
[1]) В дополнение к следующему выводу форм см. „Дополнительную заметку“ в конце отдела.

Итак, все возможные тригоноэдрические изогоны группируются в одном общем и девяти частных решениях.

Рассмотрим все случаи в подробности.

Первый случай. Сфеноэдр[40]

Нам не приходится останавливаться на этом случае, так как выведенная фигура — правильный тетраэдр — уже обстоятельно нам известна, а также известно, что изоэдр, ей соот-



Фиг. 34. Сфеноэдры.

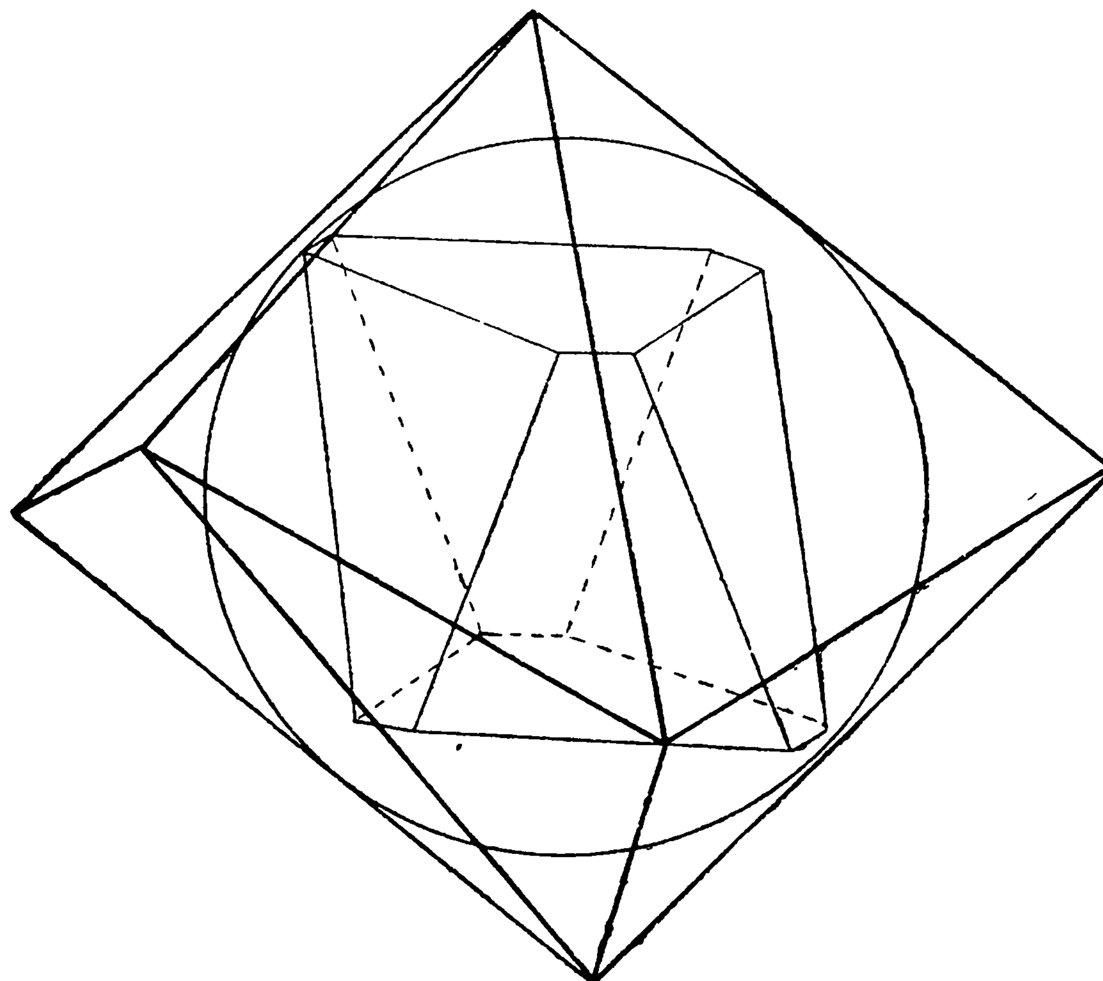
ветствующий, есть тоже правильный тетраэдр; известно также, что мы можем регулировать углы тетраэдра таким образом, чтобы получить бесконечно большое число равноугольных сфеноидов, а потому и не приходится прибегать к тому особому соображению, что при вершине такого сфеноида сходятся три угла трехугольника. Нам известно также, что равноугольные сфеноиды суть в то же время и изоэдры и представляют одновременно и типические, и подтипические формы. Эти фигуры представляют по всему этому единствен-

ное в своем роде решение, а потому прилично назвать их особым именем. Назовем их сфеноэдрами. Фиг. 34 изображает соотношение двух сфеноэдров, — описанногоо коло шара и в него вписанного.

Второй случай. Скаленоэдр и трапецоидальный призмоид

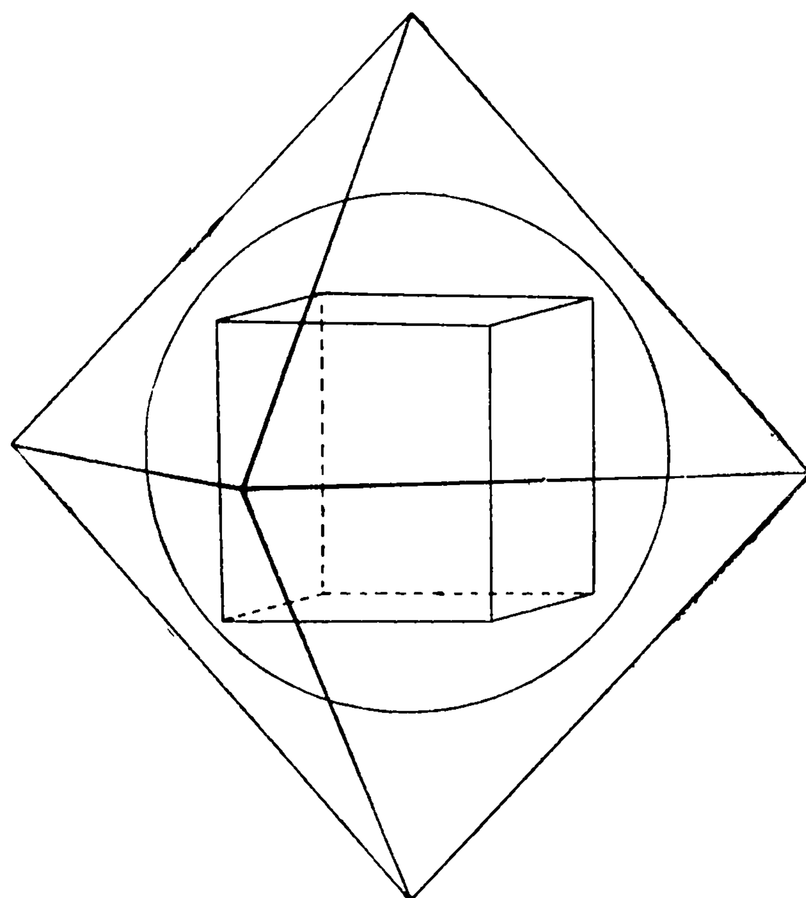
Этот случай, как мы видели, замечателен тем, что представляет собой общее решение. Притом, так как число вершин в этом случае $n = 2k$, то ясно, что в этой фигуре имеется только два правильных k-угольника, а все остальные грани — квадраты. Изогон этот называется прямою призмою; мы будем называть ее особою, если все грани ее правильные многоугольники. Гоноэдры его вертикальные или призматические. Типический изоэдр, ему соответствующий, есть бипирамида, которую мы будем называть особою, когда она соответствует особой призме; таким образом все гоноэдры особой бипирамиды правильные. Теперь посмотрим, каким видоизменениям мы можем подвергнуть эти фигуры. Ясно, во-первых, что вместо квадратов мы можем взять прямоугольники; получаем цепь предельных индивидуальностей, а именно прямые призмы с правильными основаниями; мы называем их предельными индивидуальностями, так как все они суть многогранники подтипические. Этой цепи соответствует серия видов прямой бипирамиды с основанием — правильным многоугольником или просто бипирамиды. В числе членов последней серии может встретиться бипирамида с гранями — правильными трехугольниками. В случае $k = 4$ правильная бипирамида есть октаэдр, а соответствующая ей призма есть куб. Ясно, во-вторых, что если k есть число четное, можно регулировать два соседних угла, и прямая призма дает новую серию трапецоидальных призмоидов, соответственные изоэдры которых будут скаленоэдры. Ясно, что каждый член этой серии, т. е. изогон с совершенно опре-

деленными плоскими углами, в свою очередь растягивается в цепь предельных индивидуальностей, отличающихся одна



Фиг. 35. Скаленоэдр и трапецоидальный призмоид.

от другой относительной величиной смежных сторон двух оснований. Ясно, что боковые грани этих призмоидов — трапеции, а грани соответствующих им скаленоэдров — неправильные трехугольники. От этого взято и их название, а именно определительное слово трапецоидальные для первых и самое название (скалена есть неправильный трехугольник) вторых. Взаимное отношение этих двух форм представлено на фиг. 35. Фигура же 36 изображает взаимное соотношение вписанного куба и описанного октаэдра, как особых и наиболее правильных фигур этого случая.



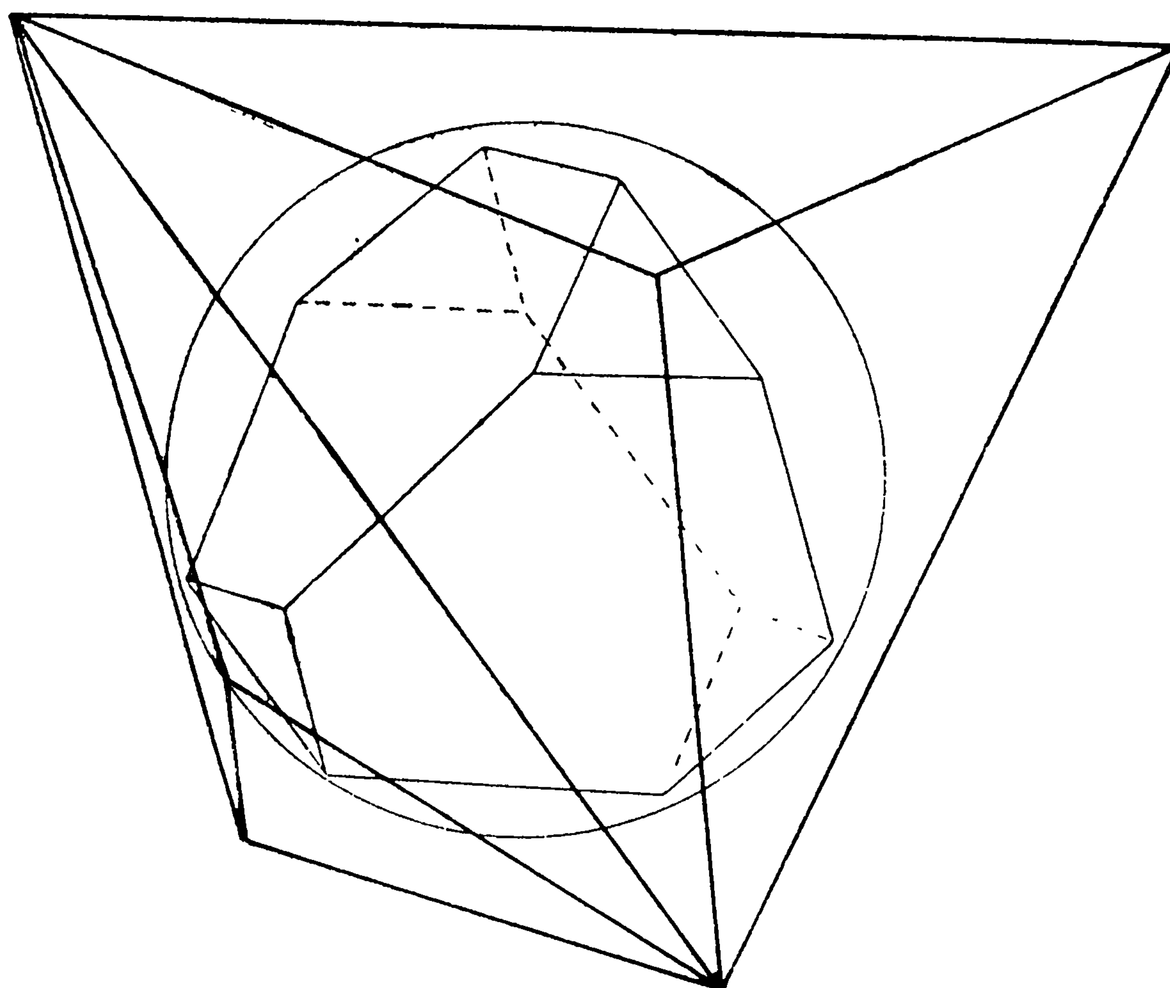
Фиг. 36. Прямые бипирамида и призма.

Кроме перечисленных форм, к этому же случаю относятся дигональные призмы, представляющие вторую цепь предельных индивидуальностей; боковые грани их — прямоугольники (в частном случае квадраты), а основания — дигональные равноугольники. Этой цепи соответствует параллельная серия дигональных бипирамид — прямых пирамид с основанием дигоном; грани этих бипирамид неправильные трехугольники; однако же, чтобы отличить от скаленоэдров, к ним не применяют последнего названия.

Третий случай. Притупленный и пирамидальный тетраэдры

Для этого случая легко определим по формуле (13а), что число граней $f=8$. Притом, так как одноименные грани, прилегающие к правильному трехугольнику, образуют друг с другом правильный гоноэдр и число таких граней 4 (так как должно быть $\frac{12}{3}=4$ трехугольника), то ясно, что они представляют собою грани тетраэдра; трехугольные же грани являются поэтому притупляющими. Число вершин соответствующего типического изоэдра есть 8, а число граней — равнобедренных трехугольников — 12; углов у него два рода — 4 тригоноэдра и 4 гексагоноэдра. Если мы соединим вершины трех гексагоноэдров, то получим правильный трехугольник, который можем принять за основание прямой пирамиды, вершина которой есть одна из вершин тригоноэдров. Полученные таким образом четыре правильных трехугольника сомкнутся в четырехгранник, а именно в правильный тетраэдр. Поэтому изоэдр этот называют пирамидальным тетраэдром. Притупленный тетраэдр не дает серии новых, но только цепь предельных индивидуальностей, когда вместо правильных шестиугольников возьмем дитригональные равноугольники. Этой цепи изогонов соответствует серия пирамидальных тетраэдров; ясно, что пирамидальных тет-

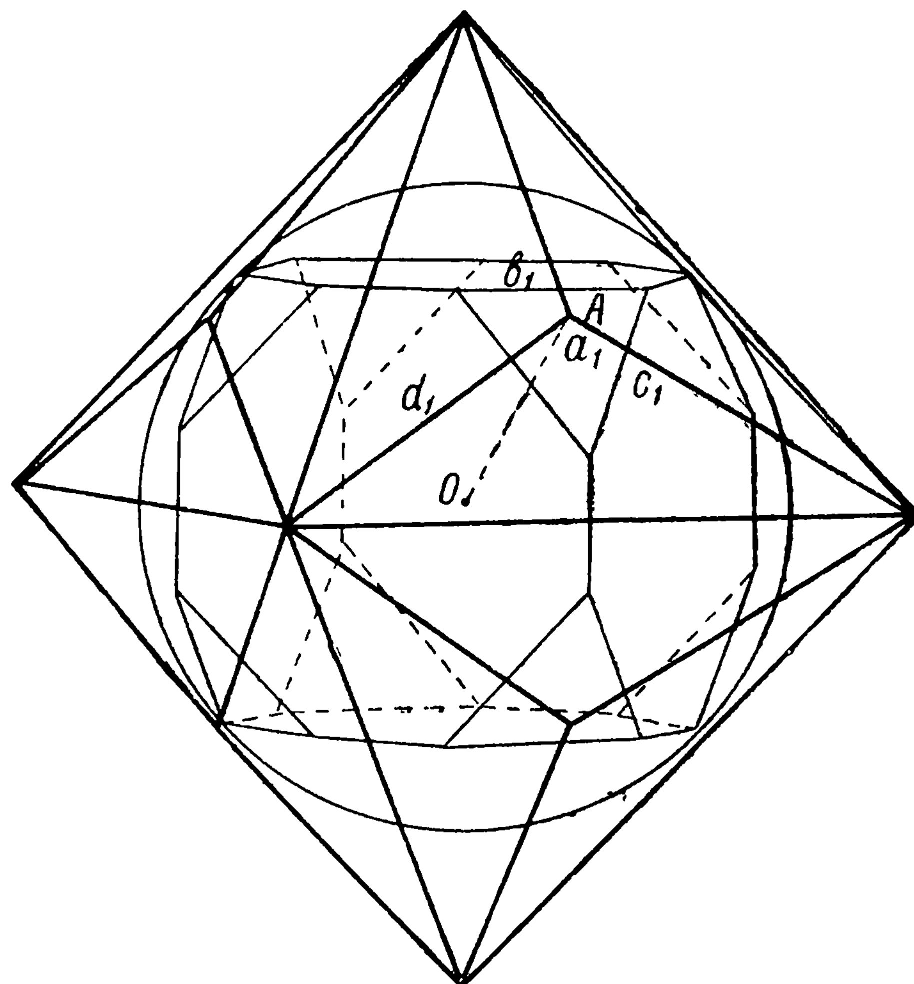
раэдров с гранями — правильными трехугольниками не существует; однако есть особый, соответствующий особому притупленному тетраэдру. Соотношение между этими формами изображено на фиг. 37.



Фиг. 37. Притупленный и пирамидальный тетраэдры.

Четвертый случай. Притупленный куб и пирамидальный октаэдр

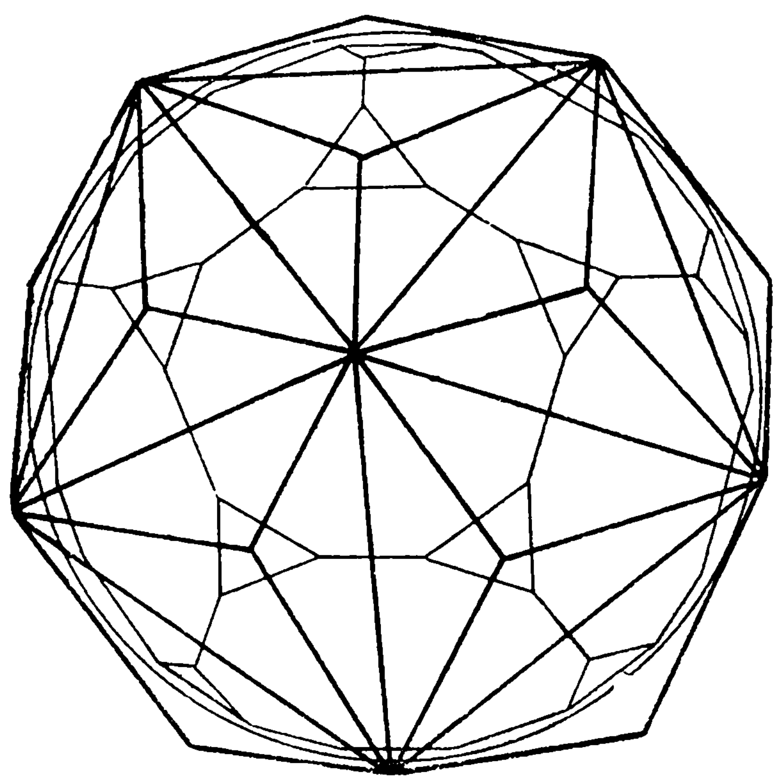
Этот случай совершенно подобен предыдущему и поэтому прямо перейдем к результатам. Изогон называется притупленным кубом, а соответственный типический изоэдр — пирамидальным октаэдром. Грани пирамидального октаэдра — равнобедренные трехугольники; у него 6 вершин октогоноэдров и 8 вершин тригоноэдров; особому притупленному кубу соответствует особый пирамидальный октаэдр. Но кроме особого есть цепь предельных индивидуальностей, параллельно которой идет серия пирамидальных октаэдров. Соотношение между этими формами представлено на фиг. 38.



Фиг. 38. Притупленный куб и пирамидальный октаэдр.

Пятый случай. Притупленный додекаэдр и пирамидальный икосаэдр

Этот случай опять совершенно сходен с двумя предыдущими и потому опять ограничимся результатами. Изогон называется притупленным додекаэдром, а соответственный изоэдр — пирамидальным икосаэдром. Грани последнего — равнобедренные трехугольники; у него 12 вершин декагоноэдров и 20 вершин тригоноэдров; особому притупленному додекаэдру соответствует особый пирамидальный икосаэдр с правильными гоноэдрами. Но кроме правильной формы имеется цепь предельных индивидуальностей, параллельно которой

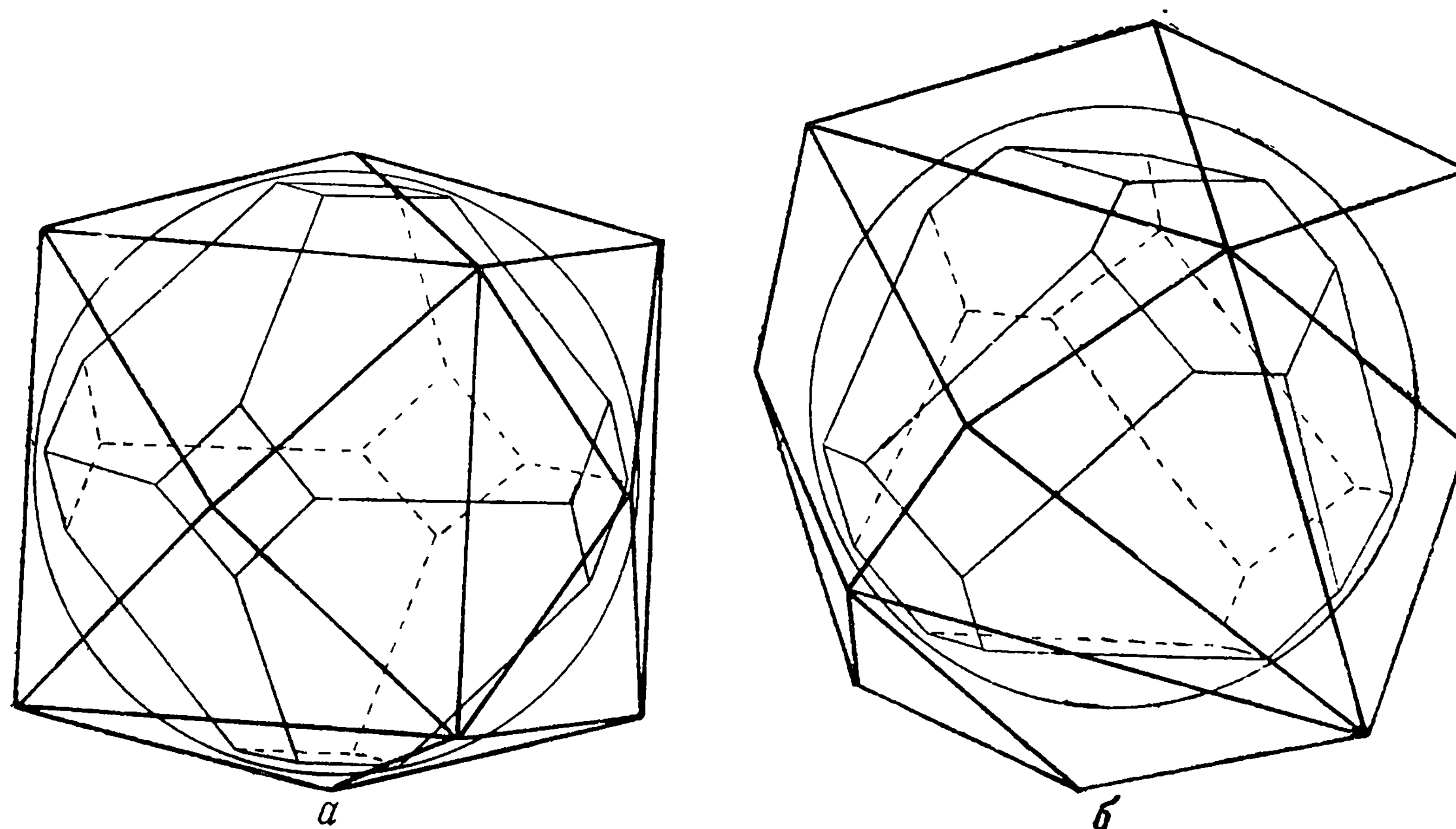


Фиг. 39. Притупленный додекаэдр и пирамидальный икосаэдр.

идет серия разных пирамидальных икосаэдров. Соотношение между формами представлено на фиг. 39.

Шестой случай. Притупленный октаэдр и пирамидальный куб

Этот случай отличается от предыдущих тем, что так как все грани изогона — четного наименования, то существуют две цепи предельных индивидуальностей, хотя и нет серий



Фиг. 40.

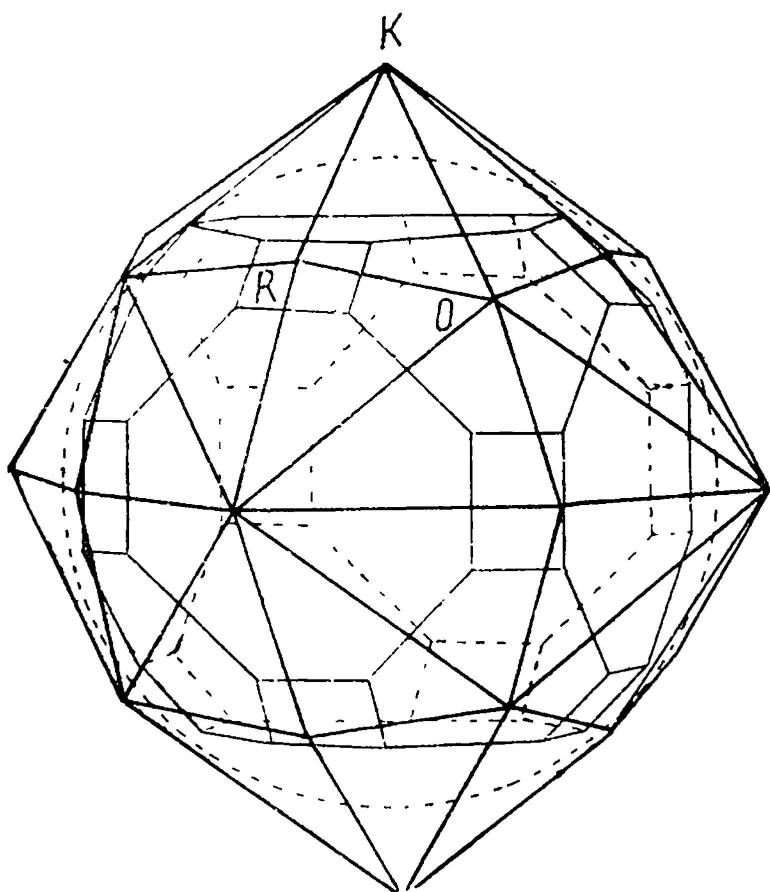
а — притупленный октаэдр и пирамидальный куб; *б* — притупленный дитетраэдр и гексакис-тетраэдр.

видов изогонов. Наиболее правильная форма есть особый притупленный октаэдр, которому соответствует пирамидальный куб с правильными гоноэдрами, т. е. особый. В последнем 6 тетрагоноэдров и 8 гексагоноэдров, а грани — равнобедренные трехугольники. Цепи притупленных октаэдров, т. е. тем изогонам, в которых правильные шестиугольники заменены дитригональными равноугольниками, соответствует серия пирамидальных кубов. Но кроме изменения правильных шестиугольников, можно изменить и форму четырехугольников, заменяя квадраты прямоугольниками. В этом случае

притупленный октаэдр заменяется *притупленным дитетраэдром*, а пирамидальный куб — *гексакис-тетраэдром* (т. е. преломленным пирамидальным тетраэдром). Соотношение между этими формами представлено на фиг. 40, *a* и *b*.

Седьмой случай. Притупленный кубо-октаэдр гексакис-октаэдр

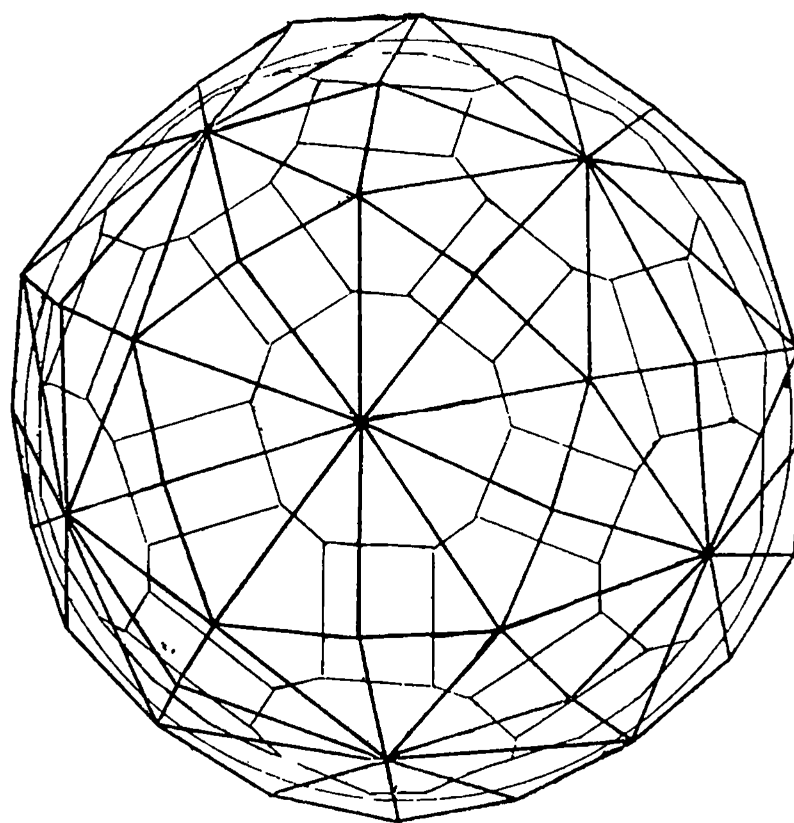
Этот случай совершенно подобен предыдущему; однако, хотя и здесь есть две цепи предельных индивидуальностей, но особых названий этим цепям не дается. Изогон называется вообще притупленным кубо-октаэдром (подразумевая под этим именем или притупленный октаэдр, или притупленный куб, или, наконец, собственно кубооктаэдр, как форма промежуточная, с которою мы вскоре встретимся; все эти изогоны относятся к одному виду, типический представитель которого есть некоторый притупленный октаэдр), а соответственный изоэдр есть гексакис-октаэдр (т. е. преломленный пирамидальный октаэдр; в кристаллографии наиболее распространенное название для него — правильный 48-гранник, — название, не оправдываемое геометрическими соображениями, но основанное на том, что фигура эта имеет оси правильной системы). Последний имеет 6 вершин октагоноэдров, 8 вершин гексагоноэдров и 12 вершин тетрагоноэдров. Если все гоноэдры правильные, он будет называться особым и соответствовать особому притупленному кубо-октаэдру. Соотношение этих форм представлено на фиг. 41.



Фиг. 41. Притупленный кубо-октаэдр и гексакис-октаэдр.

Восьмой случай. Притупленный додекаэдро-икосаэдр и гексакис-икосаэдр

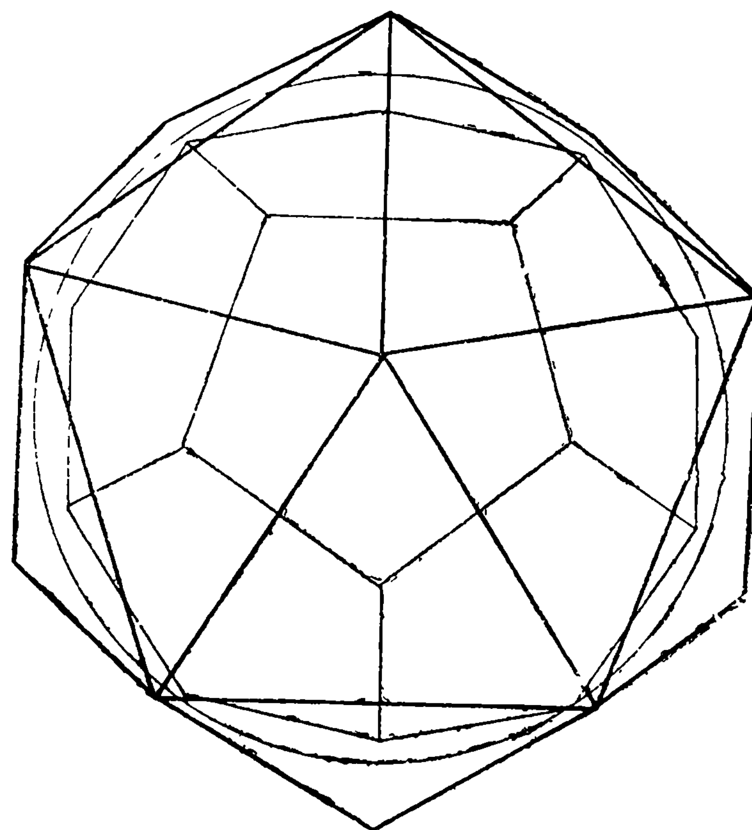
Этот случай совершенно подобен предыдущему, и даже названия обеих форм имеют одно и то же значение и происхождение. Особому притупленному додекаэдро-икосаэдру соответствует особый гексакис-икосаэдр. Последний имеет 20 вершин гексагоноэдров, 12 вершин декагоноэдров и 30 вершин тетрагоноэдров, а грани его — неправильные трехугольники. Соотношение между формами представлено на фиг. 42.



Фиг. 42. Притупленный додекаэдро-икосаэдр и гексакис-икосаэдр.

Девятый случай. Додекаэдр и икосаэдр

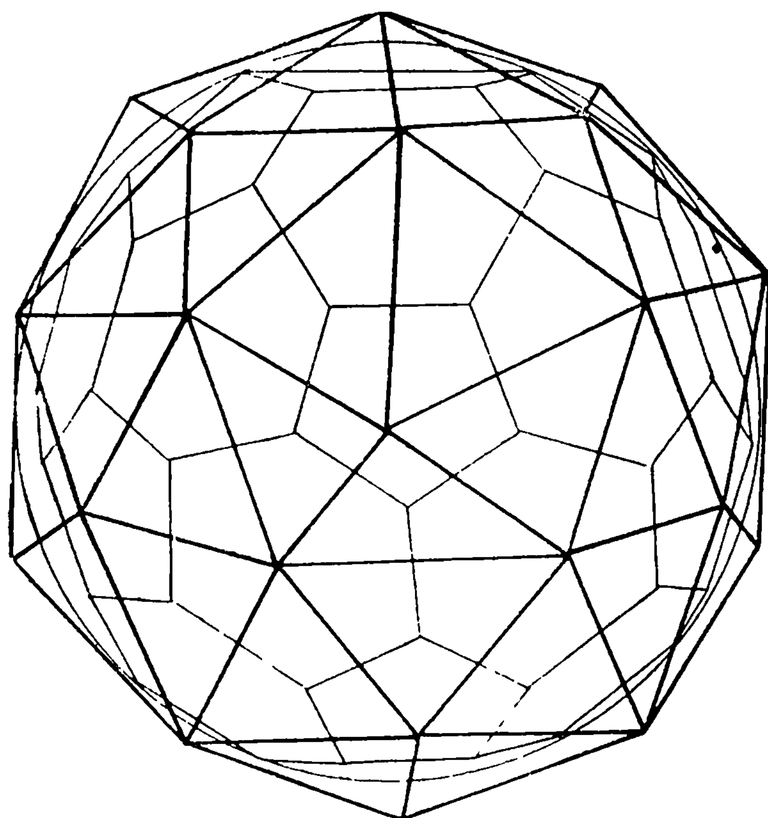
В этом случае существует только одна предельная индивидуальность изогона — правильный додекаэдр, которой соответствует изоэдр — правильный икосаэдр. Цепей соответственных форм вовсе нет. У икосаэдра все 12 вершин — пентагоноэдры и все грани — правильные трехугольники. Соотношение между формами представлено на фиг. 43.



Фиг. 43. Додекаэдр и икосаэдр.

Десятый случай. Притупленный икосаэдр и пирамидальный додекаэдр

В этом случае, подобно некоторым прежним, имеется особый притупленный икосаэдр и цепь предельных индивидуальностей этой фигуры, которым соответствует особый пирамидальный додекаэдр и серия других видов этой фигуры. Во всех этих видах грани — равнобедренные трехугольники; 20 вершин — гексагоноэдры и 12 вершин — пентагоноэдры. Соотношение между формами представлено на фиг. 44.



Фиг. 44. Притупленный икосаэдр и пирамидальный додекаэдр.

Рассматривая все эти фигуры, мы видим, что во всех вообще изоэдрах углы суть дигональные гоноэдры; [1]) исключение представляет лишь общее решение — скаленоэдры, в которых имеются дигональные гоноэдры только при двух вершинах; при остальных же — равные тетрагоноэдры, составленные по особому закону, а именно, при их вершине сходятся две пары плоских углов, остающихся от углов граней, за вычетом тех, которые сливаются в упомянутые гоноэдры. На основании этого мы можем вывести соотношение между наименованием гоноэдров, их числом и числом граней. Начнем с того случая, когда все три плоских угла различны. Обозначим через K, L и M наименования гоноэдров, а через A, B и C число каждого из них соответственно; мы получим, что каждое из произведений AK, BL и CM выражает общее число соответственных плоских углов, а так как это число и есть число граней, то получаем

$$AK = BL = CM = f. \tag{31}$$

Так как $n = \frac{f}{2} + 2$, то эту формулу мы можем представить в другом

---

[1]) Мы подразумеваем под этим гоноэдры, описанные около конуса, дающие дигоны в разрезе, перпендикулярном к оси этого конуса.

виде, а именно

$$n = \frac{AK}{2} + 2. \tag{31a}$$

Ясно, что для тригоноэдрических изогонов получим

$$F = \frac{ak}{2} + 2, \tag{32}$$

где k — наименование какой-нибудь грани, а a — число таких граней.

Помня, что между f и n существует соотношение $n = \frac{f}{2} + 2$, мы с вопроса о существовании фигур приходим к вопросу о числах. В самом деле, чтобы определить существование тригонального изоэдра с каким-нибудь числом вершин, мы должны задаться таким числом n, которое можно было бы разделить на три таких числа A, B и C, чтобы сумма их равнялась n, а каждое из них было делителем числа f. Легко получить общее решение: $AK = f$ должно быть какое-нибудь четное число, как это видно из (31a). Зададимся $n = E + E + 2 = 2E + 2$; ясно, что получим общее решение, если положим $f = 4E$, потому что $n = \frac{f}{2} + 2 = \frac{4E}{2} + 2 = 2E + 2$ и притом и E и 2 — делители числа $4E$. Очевидно, что решение относится к дигональным бипирамидам. Теперь посмотрим на частные случаи. Зададимся $AK = 24$; получаем $n = 14 = 3 + 3 + 8 = 6 + 4 + 4 = 6 + 6 + 2$. Очевидно, первое решение относится к пирамидальному октаэдру, второе — к пирамидальному кубу или гексакистетраэдру, а третье представляет случай общего решения, а именно относится к дигексагональной бипирамиде.

В случае, если трехугольники равнобедренные, мы имеем только два рода гоноэдров; пусть между ними существует A гоноэдров наименования K и B гоноэдров наименования L с плоскими углами при основании трехугольников. Ясно, что $BL = 2AK = 2f$. Подставляя в формулу (31a), получим

$$n = \frac{BL}{4} + 2. \tag{31b}$$

Допустив $BL = 4E$, легко получаем общее решение $n = E + 2$, так как и E, и 2 суть делители $f = 2E$. Это общее решение относится к прямым бипирамидам (не дигональным).

Что касается скаленоэдров, то, означив число равных гоноэдров с двумя парами плоских углов через B, получим $2B = f = 2\,(n - 2)$, откуда $B = n - 2$, т. е. на долю дигональных гоноэдров приходится только две вершины.

§ 29. II. Тетрагоноэдрические изогоны и тетрагональные изоэдры

Общая формула для таких изогонов [41]

$$n = \frac{2}{\frac{1}{i} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} - 1}.$$

Легко определить, что здесь возможны 5 случаев.[42]

11) $i = k = l = m = 3$. В этом случае $n = 6$. Так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$, то ясно, что для каждого i мы получаем $n = 2i$. Таким образом этот случай приводит к общему решению.

12) $i = k = 3$; $l = m = 4$. В этом случае $n = 12$.

13) $i = k = 3$; $l = m = 5$. В этом случае $n = 30$.

14) $i = 3$; $k = l = m = 4$. В этом случае $n = 24$.

15) $i = 3$; $k = l = 4$; $m = 5$. В этом случае $n = 60$.

Случай, когда i, k, l и $m \geqslant 4$ невозможны при конечном числе вершин.

Два встречающиеся здесь случая, а именно: a) $i = k = 3$; $l = 4$ и $m = 6$ и b) $i = k = 3$; $l = 4$ и $m = 8$, уже нам известны, хотя под другим видом, а именно случаи 6 и 7 в предыдущей группе.

Итак, всевозможные тетрагоноэдрические изогоны группируются в одном общем и четырех частных решениях.

Рассмотрим случаи в подробности.

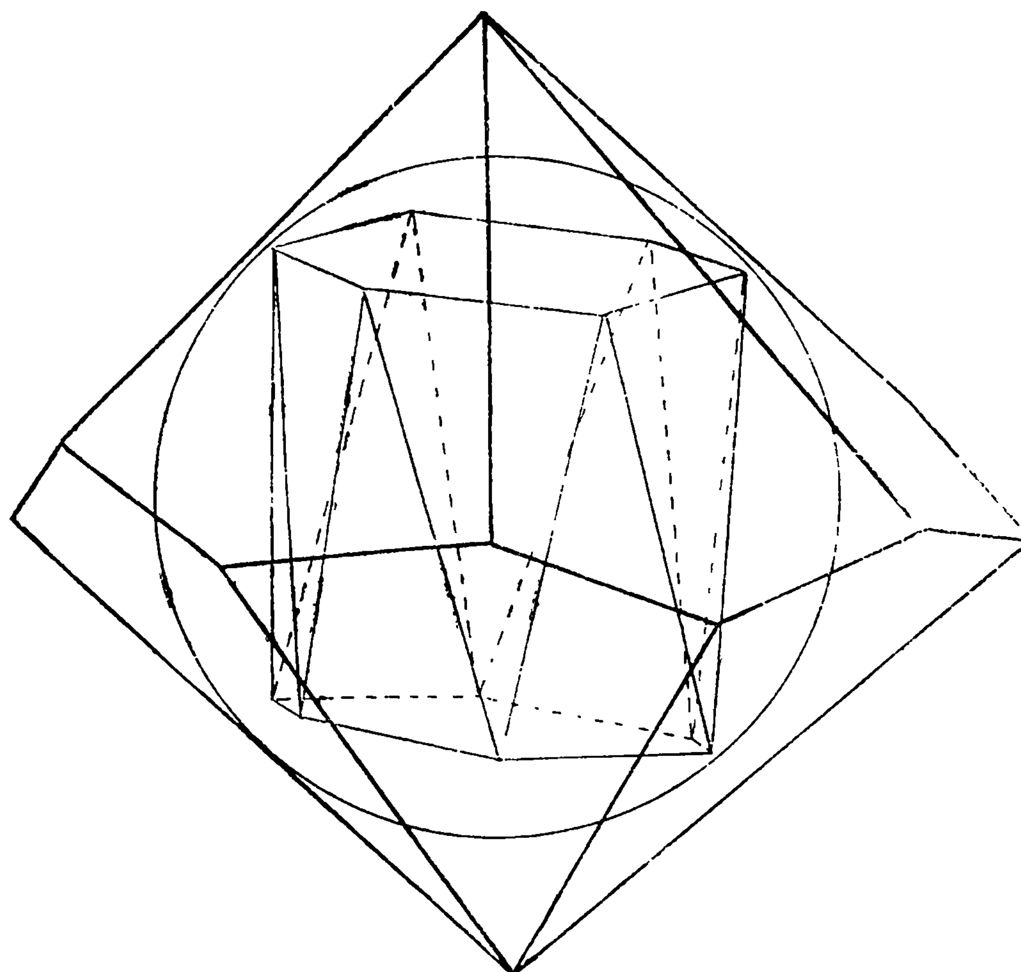
Одиннадцатый случай. Призмоид[1]) и трапецоэдр

Этот случай замечателен тем, что представляет общее решение. Так как число вершин в этом случае $2i$, то ясно, что в этой фигуре имеется только два правильных i-уголь-

---

[1]) Август (см. August, Crelle Journ., т. 45, стр. 239 и сл.) определяет призматоид как тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями, в которых находятся все его вершины, и, значит, тела, называемые нами призмоидами, как изогоны, представляют собою частный случай этих

ника, а все остальные грани суть правильные трехугольники. Мы называем этот изогон особым призмоидом. Так как в каждой вершине его сходятся три угла трехугольника, то ясно, что в этой фигуре мы можем производить самую разнообразную регулировку углов, а именно трехугольники можем брать какие угодно. Поэтому мы получаем две серии призмоидов; первая происходит, когда мы придадим произ-

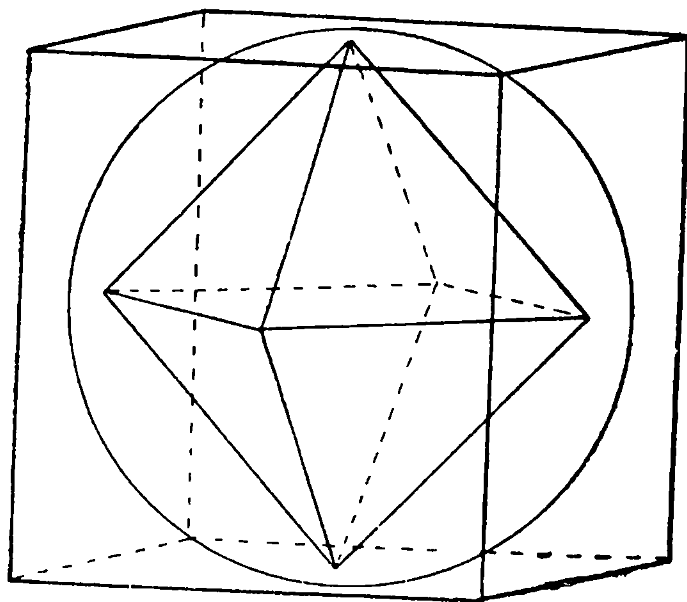


Фиг. 45. Призмоид и трапецоэдр.

вольную величину одному из углов, а два других приравняем друг к другу; вторая происходит, когда все три угла различны. Первую серию мы будем называть прямыми призмоидами, а вторую — косыми или просто призмоидами. Особому призмоиду соответствует изоэдр—особый дельтоэдр, а вообще прямому — просто дельтоэдр. У дельтоэдра грани дельтоиды

призматоидов. Впрочем, для тех же фигур автор предлагает и другие, менее удобные, названия, а в укззанном месте выводит теорему, относящуюся к их объемам и имеющую некоторую аналогию с теоремой, относящейся к площадям трапеций. См. также Коппе (там же, т. 18, стр. 275) и проч.

(т. е. четырехугольники с двумя парами равных смежных сторон), а гоноэдров два рода: одни, числом два, правильные, а все другие — трехгранные равнобедренные. В числе членов серии дельтоэдров может встретиться такой, у которого дельтоид обращается в ромб; такие дельтоэдры называются ромбоэдрами.[1]) Косым призмоидам соответствуют трапецоэдры, грани которых — неправильные четырехугольники (трапецы), два гоноэдра — правильные, а остальные трехгранные и неправильные. Соотношение между этими формами представлено на фиг. 45, а фиг. 46 изображает соотношение предельных и наиболее правильных форм, а именно изогона — правильного октаэдра, который есть не что иное, как особый тригональный призмоид, и изоэдра — куба, который представляет не что иное, как особый тригональный дельтоэдр.



Фиг. 46. Правильный тригональный призмоид (октаэдр) и правильный тригональный дельтоэдр (куб).

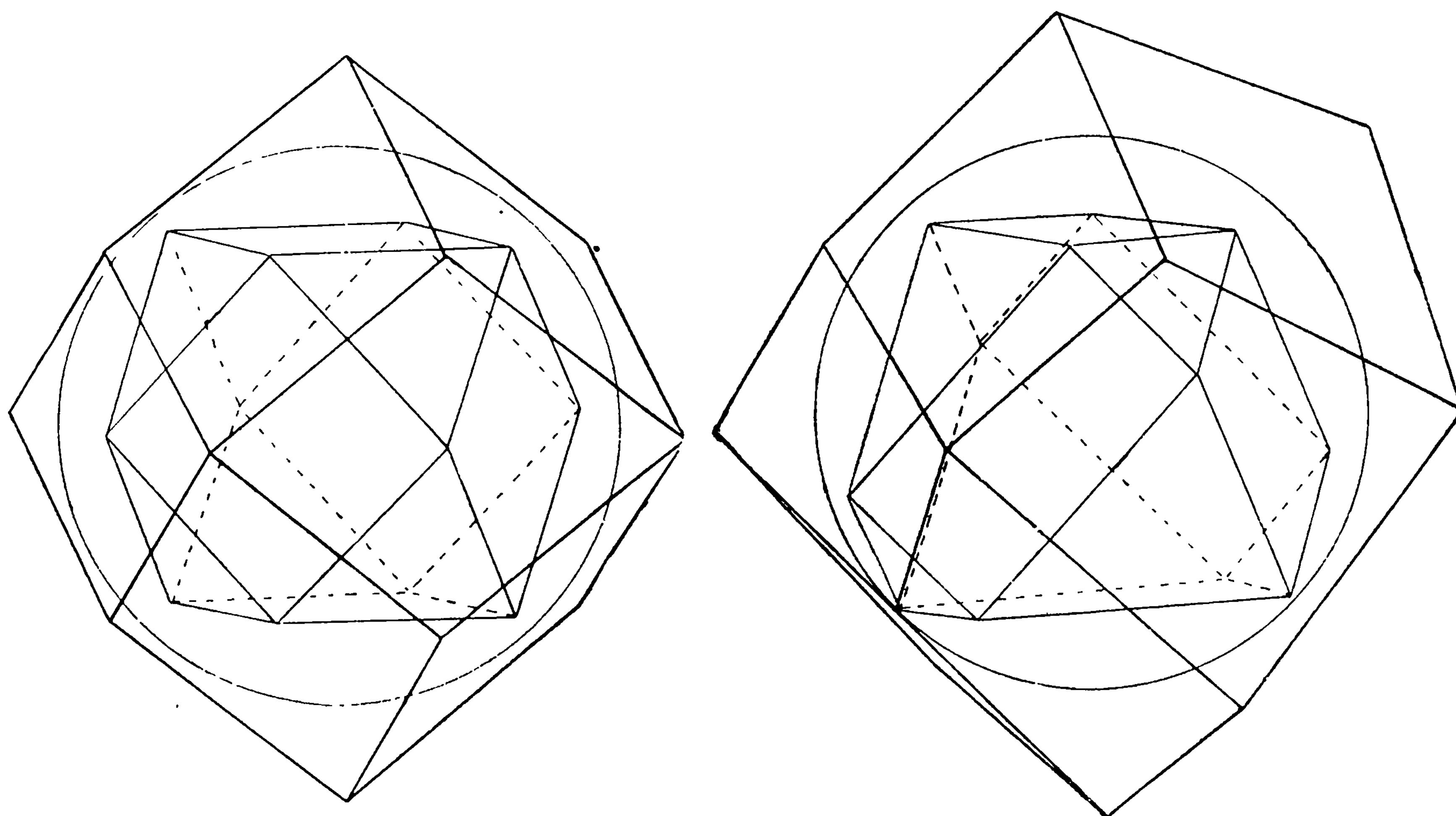
Двенадцатый случай. Кубо-октаэдр и ромбический додекаэдр

Особый изогон, относящийся к этому случаю, называется кубо-октаэдром. Чтобы доказать, что 6 квадратных граней параллельны граням куба, а 8 трехугольных граней параллельны граням октаэдра, стоит только вообразить тригоноэдры, дополнительные тем, которые получаются от продолжения однородных граней; в самом деле ясно, что, например, все гоноэдры, дополнительные тем, которые получатся от пересечения квадратных граней, будут правильные и равные,

[1]) Нетрудно убедиться, что возможен только один, тригональный ромбоэдр.

а так как число их 8 (по числу трехугольных граней, против которых должны лежать вершины тригоноэдров, образовавшихся от пересечения квадратных граней), то, значит, величина каждого из них есть $\frac{4d}{8}=\frac{d}{2}=D$; следовательно, продолженные квадратные грани образуют куб. Подобным же образом докажем, что трехугольные грани параллельны граням октаэдра. В этом легко убедиться также, если мы соединим центр шара с вершинами кубо-октаэдра; мы получаем 6 правильных тетрагоноэдров и 8 правильных тригоноэдров, и, значит, в вершине сходятся углы правильного дисфеноида, т. е. октаэдра и правильного сфеноида, т. е. тетраэдра, а эта система дополнительных углов и характеризует именно ромбический додекаэдр. На основании этого мы заключаем, что ребра кубо-октаэдра равны радиусу описанного шара, т. е. кубо-октаэдр играет роль правильного шестиугольника в геометрии на плоскости, так же как ребро куба равно диаметру вписанного шара, подобно тому, как сторона квадрата равна диаметру вписанного круга. Ромбический додекаэдр нам уже известен, и потому мы здесь не останавливаемся на его описании. Кроме того, к этому случаю относится цепь предельных индивидуальностей, получающихся от изменения квадратов в прямоугольники. Цепь эта получает особое название, а именно, изогоны называются *кубо-дитетраэдрами*, а соответствующие изоэдры *дельтоид-додекаэдрами* (триакистетраэдрами). Хотя в вершинах изогонов этого случая и сходятся два угла четырехугольника и потому на основании общего правила можно было бы ожидать возможности регулирования углов, но, однако, этот случай представляет исключение; мы видели, в самом деле, что продолженные квадратные грани образуют правильные тригоноэдры куба, вершины которых должны лежать на прямых, проведенных из центра перпендикулярно к трехугольным граням; отсюда следует, что ребра этих гоноэдров должны лежать в плоскости, проходящей через вершины трехугольной грани и

прямой, к ней перпендикулярной; между тем ясно, что если углы изменятся, то ребро выйдет из этой плоскости. Соотношение между рассмотренными фигурами представлено на фиг. 47 и 48.



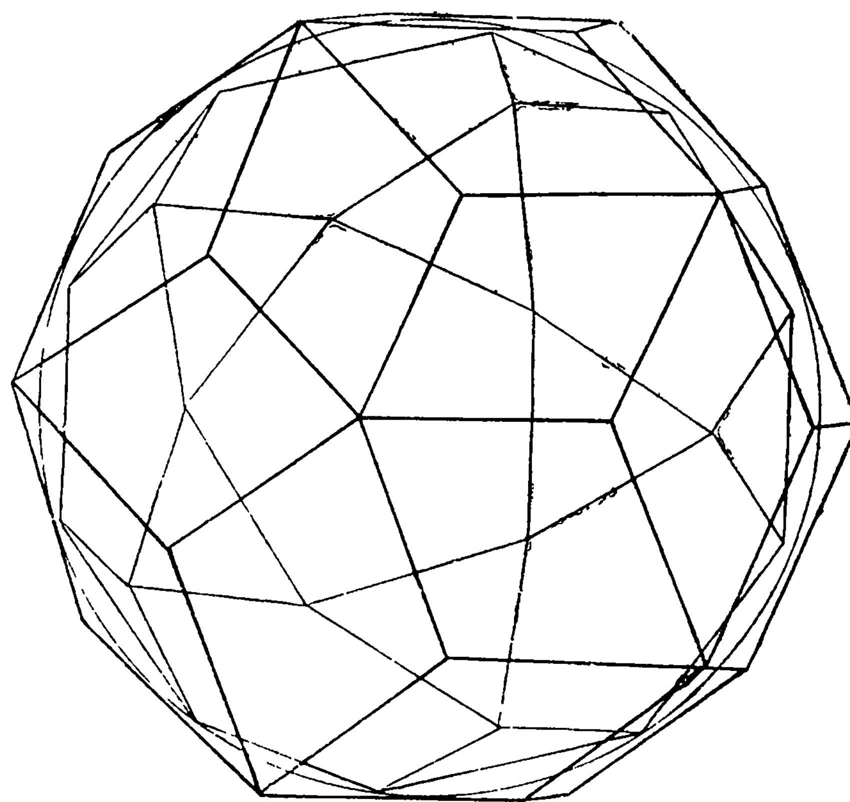
Фиг. 47. Кубо-октаэдр и ромбический додекаэдр.

Фиг. 48. Кубо-дитетраэдр и дельтоид-додекаэдр.

Тринадцатый случай. Додекаэдро-икосаэдр и ромбический триаконтаэдр

Подобно тому, как кубо-октаэдр есть форма промежуточная между притупленным кубом и притупленным октаэдром, додекаэдро-икосаэдр есть форма, промежуточная между притупленным додекаэдром и притупленным икосаэдром, и как сама форма образуется возрастанием притупления до тех пор, пока две притупляющие плоскости не сойдутся в одной вершине. Соответствующий ей типический изоэдр — ромбический триаконтаэдр может быть образован из пирамидального икосаэдра или пирамидального додэкаэдра, [если вращать] две грани при общем ребре до тех пор, пока они не сольются в одну, которая, очевидно, будет ромбом,

как грань, составившаяся из двух равных равнобедренных трехугольников, имеющих общее основание. Ясно, что обе формы совершенно единичны, так как грани изогона нечетного наименования. Соотношение между формами представлено на фиг. 49.

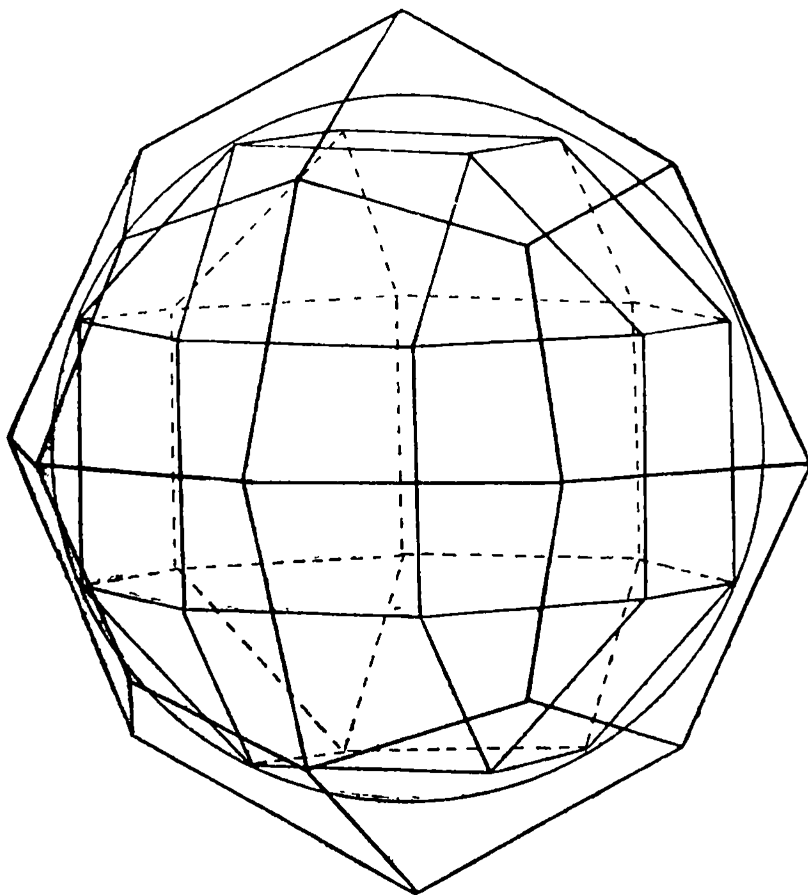


Фиг. 49. Додекаэдро-икосаэдр и ромбический триаконтаэдр.

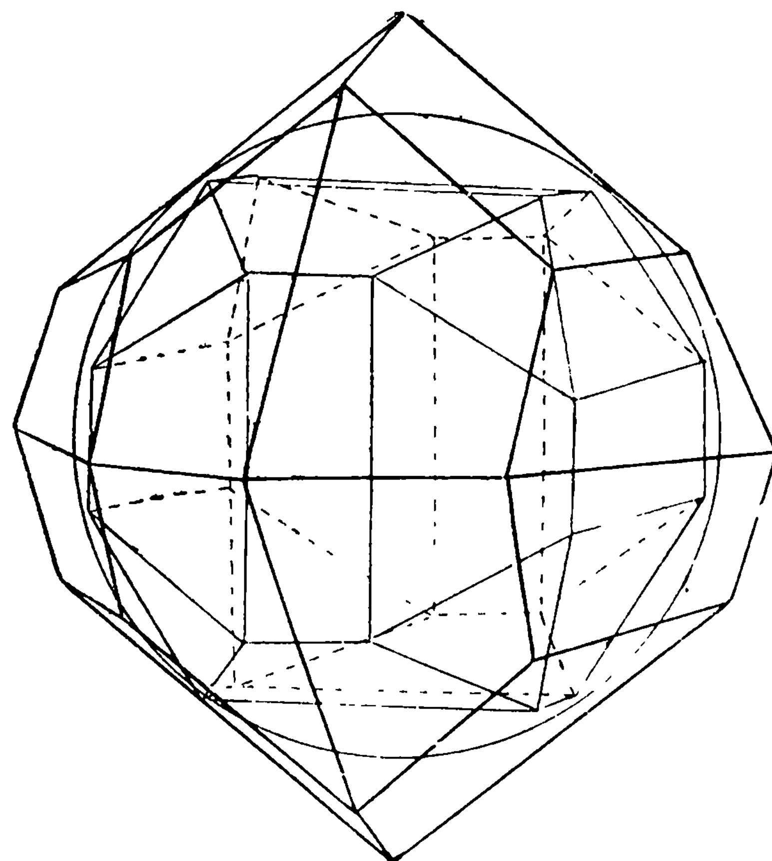
Четырнадцатый случай. Тетрагоноэдрический притупленный кубо-октаэдр и триакис-октаэдр

Подобно предыдущему случаю происходит образование изогона и в этом случае. Особый тетрагоноэдрический притупленный кубо-октаэдр есть предельная форма притупленного кубо-октаэдра; он образуется, когда притупляющие грани (ромбического додекаэдра) сходятся при одной вершине и образуют тетрагоноэдры. Этой форме соответствует изоэдр — особый триакис-октаэдр (с правильными гоноэдрами), происходящий из гексакис-октаэдра через слитие смежных (имеющих общую сторону) трехугольных граней; так как трехугольники, из которых он образовался, были неправильные, то и его грани не могут быть ромбами, а суть дельтоиды, почему этот многогранник называют также дельтоэдром; мы

не можем принять этого названия, так как под последним именем мы подразумеваем ряд совершенно иных форм (для него существует еще техническое название — лейцитоэдр, наиболее распространенное в кристаллографии и заимствованное, хотя и неправильно, от минерала лейцита). Многогранник этот имеет 26 вершин; 8 принадлежат тригоноэдрам,



Фиг. 50. Прямой тетрагоноэдрический притупленный кубо-октаэдр и триакис-октаэдр.



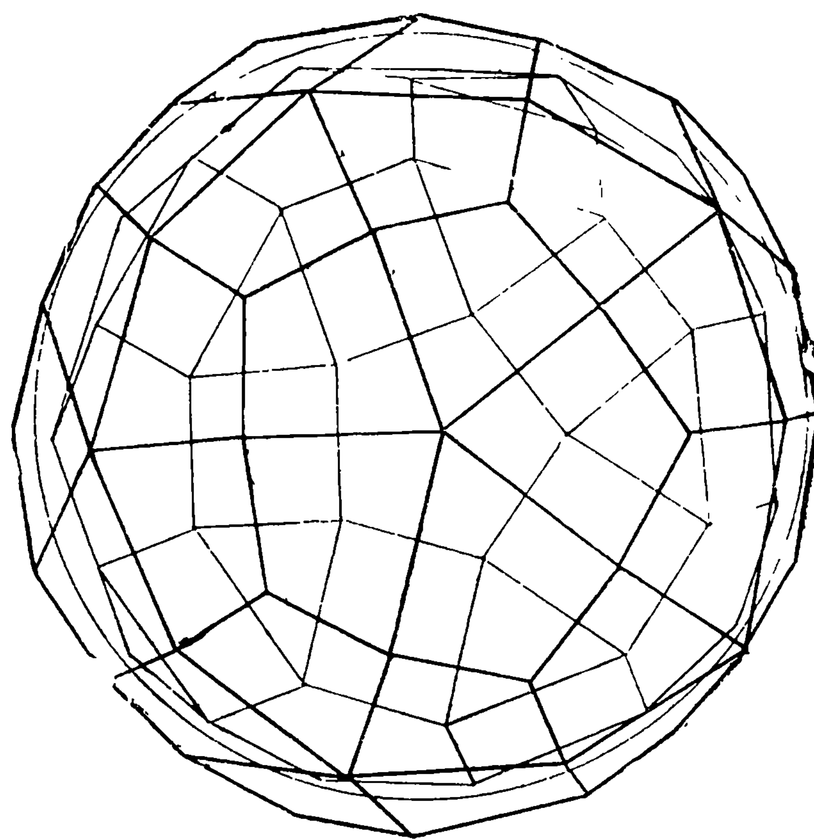
Фиг. 51. Косой тетрагоноэдрический притупленный кубо-октаэдр и преломленный пентагональный додекаэдр (косой триакис-октаэдр).

а остальные тетрагоноэдрам. Изогон, относящийся к этому случаю, представляет не только цепь предельных индивидуальностей, но еще и серию видов с регулированными углами. Регулировка эта весьма понятна, если сообразим, что при каждой вершине сходятся три угла четырехугольника. Изогоны, относящиеся к этой серии, в отличие от рассмотренной предельной цепи могут быть названы *косыми*; изоэдры же, им соответствующие, имеют уже особое наименование *преломленных пентагональных додекаэдров*, название, которое станет нам понятным, если мы представим себе,

что вершины двух гоноэдров изогона, принадлежащие концам коротких сторон прямоугольников, сливаются между собою, а соответственно этому сливаются и пары граней изоэдра; тогда все грани изогона будут трехугольниками, а гоноэдры — пятигранными; у изоэдра же все грани будут пятиугольники, а гоноэдры — трехгранные. Ясно, что грани преломленного пентагонального додекаэдра уже не будут дельтоидами, а неправильными четырехугольниками, имеющими только пару равных сторон (ребер тригоноэдров). Соотношение между рассмотренными формами представлено на фиг. 50 и 51.

Пятнадцатый случай. Тетрагоноэдрический притупленный додекаэдро-икосаэдр и триакис-икосаэдр

Случай этот совершенно аналогичен предыдущему, так что стоит только вообразить додекаэдро-икосаэдр вместо кубооктаэдра, чтобы понять образование изогона по предыдущему описанию. Однако изогон этот не дает серии, т. е. углы его, хотя в число их и входят два угла квадрата, не регулируются по той же причине, что и в кубо-октаэдре. Имеется цепь предельных индивидуальностей, вследствие изменения квадратов в прямоугольники. Изоэдр, ему соответствующий, есть триакис-икосаэдр, образующийся из гексакис-икосаэдра, совершенно подобно тому, как триакис-октаэдр образуется из гексакис-октаэдра; имеется серия типических представителей. В нем 62 вершины: 12 принад-



Фиг. 52. Тетрагоноэдрический притупленный додекаэдро-икосаэдр и триакис-икосаэдр.

лежат пентагоноэдрам, 30 — тетрагоноэдрам и 20 — тригоноэдрам. Грани его — дельтоиды. Соотношение между фигурами этого случая изображено на фиг. 52.

Рассматривая только что разобранные изоэдры, мы видим, что при их вершинах лежат или дигональные гоноэдры, в которых сходятся все одинаковые плоские углы граней, или равные тетрагоноэдры, в которых сходятся две пары равных углов, и только трапецоэдры представляют исключение, так как при их вершинах сходятся три разных плоских угла. На отновании этого, мы можем вывести соотношение между числом гоноэдров, их наименованием и числом граней. Означая через I, K, L и M наименование гоноэдров, через A, B, C и D — их число, получим для углов, образованных по первому закону, $AI = f$; если же грань имеет пару равных углов, то, очевидно, $BK = 2f$. При втором законе образования гоноэдров получим $C = \frac{f}{2}$ и, наконец, при третьем получим $D = f$.

Таким образом, зная закон образования гоноэдров в данном тетрагональном изоэдре и зная число граней, мы по этим формулам легко определим число гоноэдров каждого рода. Параллельно с этим, и даже по этим же формулам, мы определяем число одноименных граней и их наименование в тетрагоноэдрических изогонах.

§ 30. III. Пентагоноэдрические изогоны и пентагональные изоэдры

Общая формула для таких изогонов[43]

$$n = \frac{2}{\frac{1}{i} + \frac{1}{j} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{3}{2}}.$$

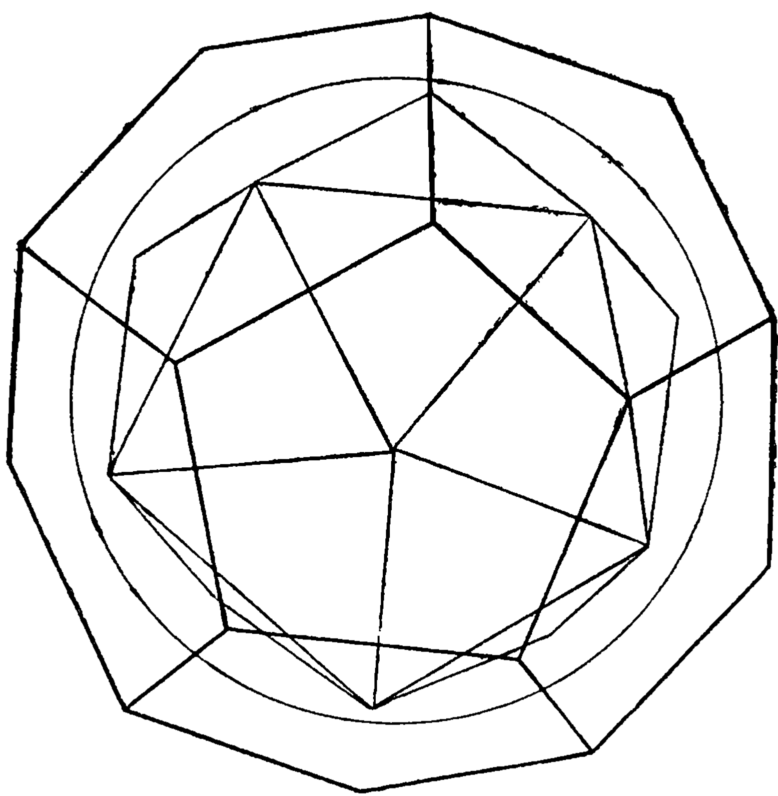
Легко определить, что здесь возможны только три случая:

1) $i = j = k = l = m = 3$; в этом случае $n = 12$.
2) $i = j = k = l = 3$ и $m = 4$; в этом случае $n = 24$.
3) $i = j = k = l = 3$ и $m = 5$; в этом случае $n = 60$.

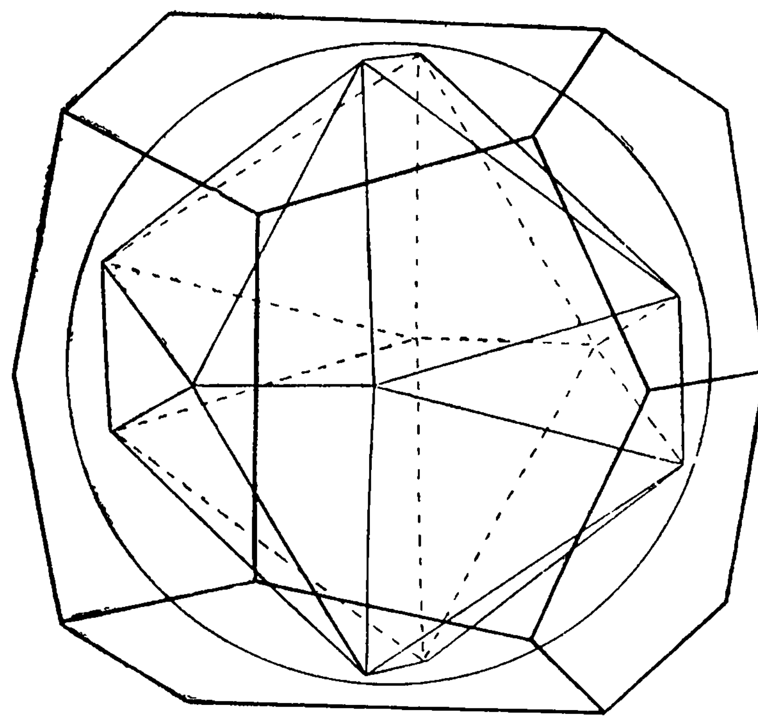
На все эти три случая можно смотреть, как на один, в котором $i = j = k = l = 3$ и $m = x$. Так как это общее решение совершенно аналогично общим решениям, дававшим

призмоиды, то для выражения этой аналогии мы назовем изогоны, сюда относящиеся, *призмоэдрами*, не забывая, однако, что существует только три призмоэдра: тригональный, тетрагональный и пентагональный. Особым призмоэдрам соответствуют особые изоэдры, которых мы назовем *пентагон-изоэдрами*, так как их грани пятиугольные; таким образом существуют три особых пентагон-изоэдра. Легко видеть, что особый тригональный призмоэдр есть правильный икосаэдр, а соответственный особый пентагон-изоэдр есть правильный додекаэдр; особому тетрагональному призмоэдру соответствует особый тетрагональный пентагон-изоэдр, и особому пентагональному призмоэдру соответствует особый пентагональный пентагон-изоэдр. Хотя в этом случае цепи предельных индивидуальностей изогона не имеется, но зато, вследствие того, что при вершинах изогона сходятся 4 угла плоских трехугольников, легко получить серию видов призмоэдров посредством регулировки трех из углов, оставляя величину четвертого угла неизменным. В общем случае изогоны этих серий будут содержать в себе неправильные трехугольники, и мы будем называть их косыми; им соответственные изоэдры будут косые пентагон-изоэдры; грани последних — неправильные пятиугольники, имеющие, как легко видеть, две пары смежных равных сторон. Тригональный и тетрагональный пентагон-изоэдры получили особые названия, а именно тетартоэдр и гироэдр; пентагональный же пентагон-изоэдр особого общепринятого названия еще не получил. У тригонального пентагон-изоэдра все углы тригоноэдры: из них 8 правильных и 12 неправильных. У тетрагонального пентагон-изоэдра 6 правильных тетрагоноэдров, 8 правильных тригоноэдров, а остальные 24 тригоноэдра неправильные; наконец, у пентагонального пентагон-изоэдра 12 правильных пентагоноэдров, 20 правильных тригоноэдров, а остальные 60 тригоноэдров неправильные. Заключения эти легко вывести, исходя из числа и наименования граней соответственных изогонов. Наконец, кроме косых тригональных

призмоэдров существуют еще *равнобедренные*, когда вместо неправильных трехугольников мы возьмем равнобедренные. Этим призмоэдрам соответствуют *равнобедренные пентагон-изоэдры*, характеризующиеся тем, что углы, принадлежащие к особым (т. е. единичным, не имеющим себе равных) сторонам, равны между собою. У равнобедренного тригонального пентагон-изоэдра все четыре стороны (вместо двух пар рав-



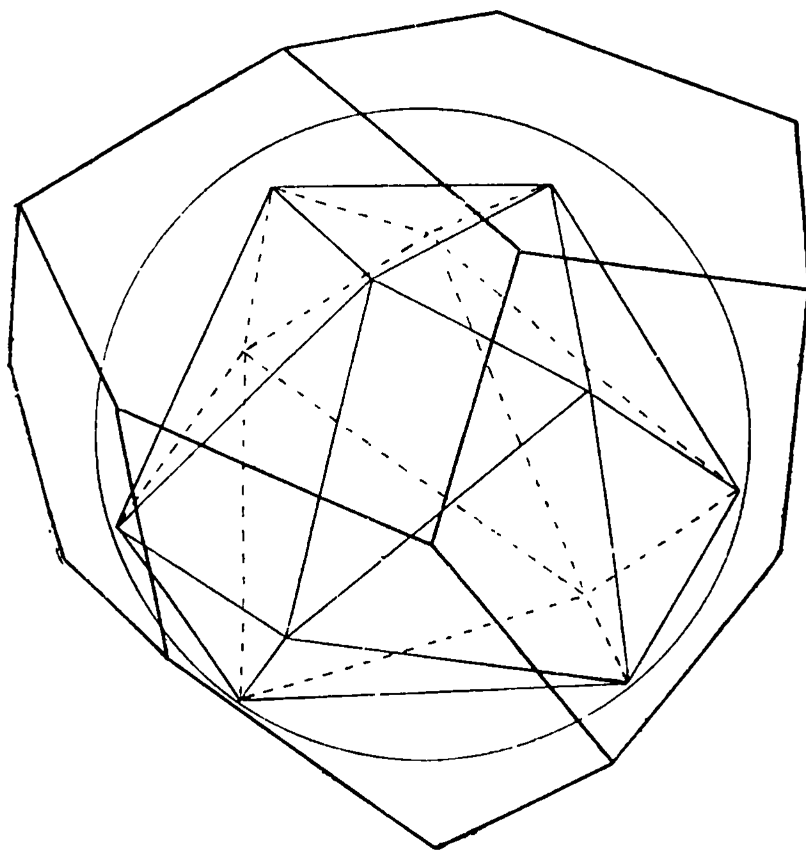
Фиг. 53. Правильные тригональные пентагон-изоэдр (додекаэдр) и призмоэдр (икосаэдр).



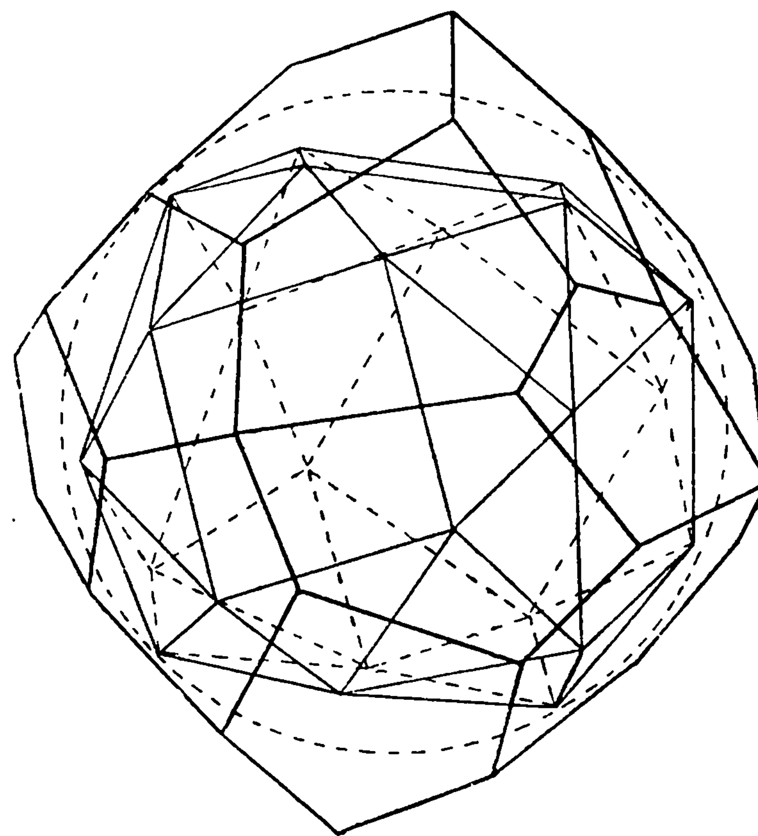
Фиг. 54. Равнобедренные тригональные призмоэдр и пентагон-изоэдр (пентагональный додекаэдр).

ных) будут равны между собою, а потому его грань будет симметрической по отношению к одной из прямых (а именно перпендикуляру, восстановленному из середины особенной стороны) пятиугольника; этот изоэдр носит особое название пентагонального додекаэдра. Соотношение между формами представлено на фиг. 53—57, а именно: фиг. 53 изображает вписанный в шаре икосаэдр и описанный додекаэдр; фиг. 54 изображает равнобедренные тригональные призмоэдр и пентагон-изоэдр, т. е. пентагональный додекаэдр; фиг. 55 представляет косые тригональные призмоэдр и пентагон-изоэдр, т. е. тетартоэдр; фиг. 56 изображает тетрагональные призмо-

эдр и пентагон-изоэдр, т. е. гироэдр, и, наконец, фиг. 57 изображает пентагональные призмоэдр и пентагон-изоэдр.

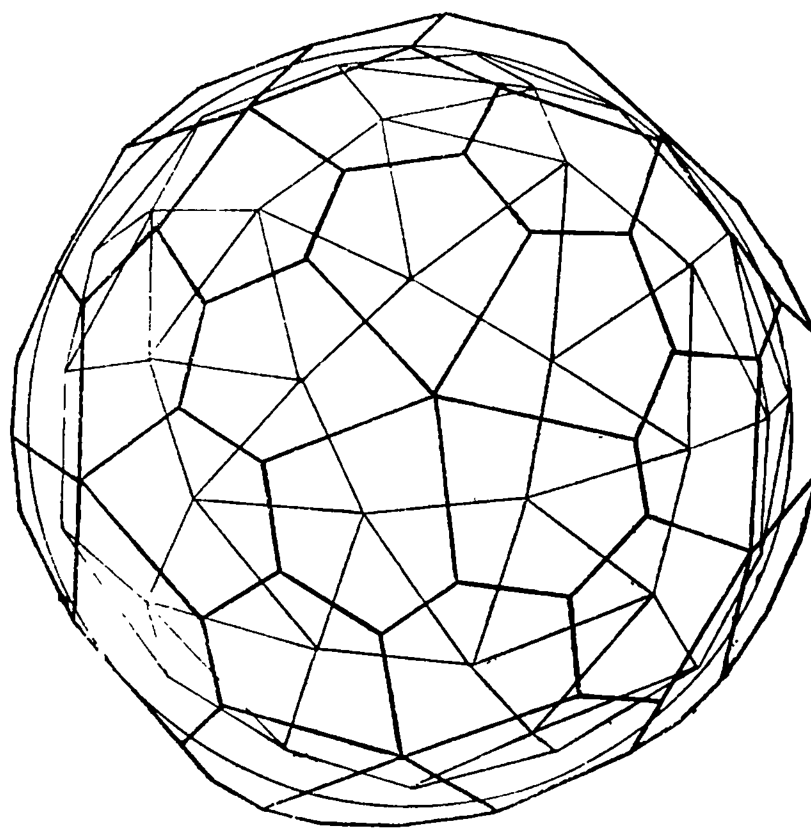


Фиг. 55. Косые тригональные призмоэдр и пентагон-изоэдр (тетартоэдр).



Фиг. 56. Тетрагональные призмоэдр и пентагон-изоэдр (гироэдр).

Рассматривая только что разобранные изоэдры, мы видим, что все их гоноэдры образованы по двум законам, а именно, из пяти каких-нибудь углов α, β, γ, δ и ε грани, два, например α и β, всегда образуют дигональные гоноэдры (точнее, правильные гоноэдры), а все остальные образуют тригоноэдры таким образом, что γ одной грани сходится с δ из других, т. е. неправильные гоноэдры. Для гоноэдров, образованных по первому закону, мы имеем общую формулу $AK=f$,[44] и для гоноэдров, образованных по второму закону, имеем общую формулу $B=f$, подобно тому, как и трапецоэдров. На основании этого, не прибегая ни к формулам следствия теоремы 19, ни к формулам следствия теоремы 18,



Фиг. 57. Пентагональные призмоэдр и пентагон-изоэдр.

легко определим число вершин, а следовательно, и число граней изогонов. Так, мы знаем, что пентагональный пентагон-изоэдр имеет 60 граней и что правильные гоноэдры его — трех- и пятигранные; поэтому

$$AK = A \cdot 3 = 60 \text{ и } BL = B \cdot 5 = 60,$$

откуда $A = 20$ и $B = 12$; что же касается C, то оно должно быть равно 60, следовательно:

$$n = A + B + C = 20 + 12 + 60 = 92,$$

а потому и у пентагонального призмоэдра 92 грани: 12 правильных пятиугольников, 20 правильных трехугольников и 60 неправильных трехугольников.

Глава 6

НЕТИПИЧЕСКИЕ ИЗОЭДРЫ

§ 31. Рассмотренными выше случаями исчерпываются всевозможные изогоны, а также всевозможные типические изоэдры. Однако этим еще не исчерпываются всевозможные изоэдры, и, действительно, легко видеть, что если мы из центра, вписанного в шаре особого изогона, восставим перпендикуляр на какую-нибудь грань и, взяв на нем произвольную точку, соединим ее с вершинами той же грани, то получим несколько новых равных граней — равнобедренных трехугольников, играющих роль боковых граней прямой пирамиды, насаженной на грань изогона. Если на грани другого наименования мы насадим соответственные пирамиды, которых грани были бы теми же самыми трехугольниками, то мы получим вообще изоэдр с трехугольными гранями. Мы можем далее через середины ребер изогона, т. е. сторон оснований насаженных пирамид, провести плоскости, к ним перпендикулярные, затем в этих плоскостях провести прямые, делящие пополам угол между гранями двух соседних пирамид, и взять на этих прямых произвольные точки, которые мы соединим с вершинами обеих пирамид и с концами соответственного ребра; поступая подобным же образом со всеми другими ребрами, мы получим новый изоэдр, грани которого будут неправильные трехугольники. Разберем все возможные 16 случаев.

П е р в ы й с л у ч а й. Из правильного тетраэдра по первому закону мы получим пирамидальный тетраэдр, многогранник, уже нам известный; по второму закону — гексакис-тетраэдр, тоже известный. Наконец, так как тетраэдр состоит из трехугольников, то мы можем непосредственно приложить к нему второй закон, т. е. провести из его центра прямые

к серединам двух противоположных ребер и взять на них произвольные точки на равном расстоянии от центра, и тогда получим простейший 8-гранный скаленоэдр, тоже известный и типический многогранник. Очевидно, что мы получим ту же фигуру, если вместо тетраэдра возьмем сфеноэдр с гранями — равнобедренными трехугольниками и приложим к нему второй закон.

Второй случай. Из особых призм мы можем образовать новые изоэдры; однако, как легко видеть, число полученных многогранников весьма ограничено. В самом деле, при вершинах таких призм будут находиться гексагоноэдры, сумма плоских углов которых должна быть менее $4d$, а так как все эти углы равны между собой, то значит, каждый из них должен быть менее $\frac{2}{3}d$, т. е. угла правильного трехугольника, а это обусловливает собою то, что углы при вершинах насаженных пирамид должны быть более $\frac{2}{3}d$; это же условие выполняется лишь в том случае, если насаженные пирамиды имеют при вершине менее 6 граней. Таким образом приходим лишь к трем новым сериям нетипических изоэдров, а именно *тригональной*, *тетрагональной* и *пентагональной пирамидальным призмам*. Прилагая же к ним второй закон, получим еще три новые серии нетипических изоэдров, а именно *тригональный*, *тетрагональный* и *пентагональный призмоскаленоэдры*.

Третий случай. Легко видеть, что изоэдры по вышеуказанным законам в этом случае образовать невозможно.

Четвертый случай. Опять получаем невозможность.

Пятый случай. Опять то же.

Шестой случай. Опять то же.

Седьмой случай. Опять то же.

Восьмой случай. Опять то же.

Девятый случай. Получаем пирамидальный додекаэдр, уже известный, и затем гексакис-икосаэдр, тоже известный.

Десятый случай. Получаем невозможность.

Одиннадцатый случай. Легко видеть, что означенные законы можно приложить только к первому члену. В самом деле, при вершинах призмоидов полученных таким образом изоэдров должны находиться октагоноэдры с равными плоскими углами; следовательно, каждый угол должен быть менее $\frac{d}{2}$, а потому углы при вершинах насаженных пирамид должны быть более d, а следовательно, сами пирамиды не могут быть ни четырехгранные, ни тем более, высшего наименования. Первый же член, как мы знаем, есть не что иное, как правильный октаэдр, а из него по вышеуказанным законам получаем пирамидальный октаэдр и

гексакис-октаэдр, формы уже известные. Из прямых призмоидов, т. е. тех, у которых боковые грани — равнобедренные трехугольники, а основания — правильные многоугольники, мы уже можем получить неопределенное число новых нетипических изоэдров, а именно, *четверных* или *тетрапирамид*, т. е. общее решение для нетипических изоэдров. Итак, тетрапирамида есть изоэдр, полученный из прямого призмоида насаживанием на него двух одноименных с ним прямых пирамид, грани которых были бы равны боковым граням призмоида. Прилагая к ним второй закон, получим другое общее решение *бискаленоэдров*.

Двенадцатый случай. Получаем невозможность.

Тринадцатый случай. Опять то же.

Четырнадцатый случай. Опять то же.

Пятнадцатый случай. Опять то же.

Шестнадцатый случай. Легко видеть, что в этом случае оба закона мы можем приложить только к первому члену или правильному тригональному призмоэдру, т. е. правильному икосаэдру, и получаем опять известные уже нам изоэдры — пирамидальный икосаэдр и гексакис-икосаэдр.

Но кроме правильных изогонов существуют еще изоэдры с правильными гранями, помимо правильных многогранников, а именно тригональная и пентагональная бипирамиды (особая же тетрагональная бипирамида есть правильный октаэдр, т. е также и правильный изогон). Прилагая к этим двум фигурам оба закона, мы получаем новые четыре нетипических изоэдра — *тригональные* и *пентагональные пирамидальные бипирамиды* и *пирамид-скаленоэдры*.

Еще изоэдры с ромбическими гранями способны образовать по этому закону новые изоэдры; при этом из ромбоэдра образуется нетипический изоэдр — *пирамидальный ромбоэдр*. Ромбические же додекаэдр и триаконтаэдр дают известные типические фигуры.

Таким образом, если принять во внимание, что тетрагональные пирамидальная призма и призмо-скаленоэдр не что иное, как типический пирамидальный куб и гексакис-октаэдр, мы получаем всего два общих и девять частных решений для нетипичных изоэдров. В частных случаях и нетипические изоэдры могут стать типическими и, следовательно, уже выведенными раньше, например, пентагональная тетрапирамида с гранями правильными трехугольниками есть не что иное, как правильный икосаэдр.

Известно еще несколько законов, по которым из данных изоэдров мы можем образовать другие; их можно разделить на две категории: 1) законы пределов и 2) законы мэроэдрии.[1]) По законам первого рода из

---

[1]) Этот термин здесь употреблен в том смысле, какой ему придан Браве (Bravais, Journ. de l'Ec. polyt., тетр. 34, стр. 200), как это и будет разъяснено дальше.

тригональных изоэдров можно образовать тетрагональные; по законам второго рода, из самых разнообразных изоэдров можно образовать самые разнообразные.

Законов первого рода два: a) когда грани изоэдра равнобедренные трехугольники, то для того, чтобы получить тетрагональный, нужно вращать грани около основания, пока пара граней, для которых данное ребро есть общее основание, не сольется в одну грань; b) когда грани изоэдра неправильные трехугольники, то нужно вращать грани около длиннейшей стороны.

Применяя закон a) к известным типическим изоэдрам, получаем

из пирамидальных октаэдра и куба — ромбический додекаэдр;
из пирамидального тетраэдра — куб;
из пирамидальных додекаэдра и икосаэдра — ромбический триаконтаэдр.

Применение этого закона к нетипическим изоэдрам оказывается или невозможным, или также приводит к уже известным типическим изоэдрам (дельтоэдры из тетрапирамид).

Применяя закон b) к известным типическим изоэдрам, получаем

из гексакис-октаэдра — триакис-октаэдр;
из гексакис-тетраэдра — дельтоид-додекаэдр (триакис-тетраэдр);
из гексакис-икосаэдра — триакис-икосаэдр;
из скаленоэдров — дельтоэдры.

Применение этого закона к нетипическим изоэдрам оказывается невозможным.

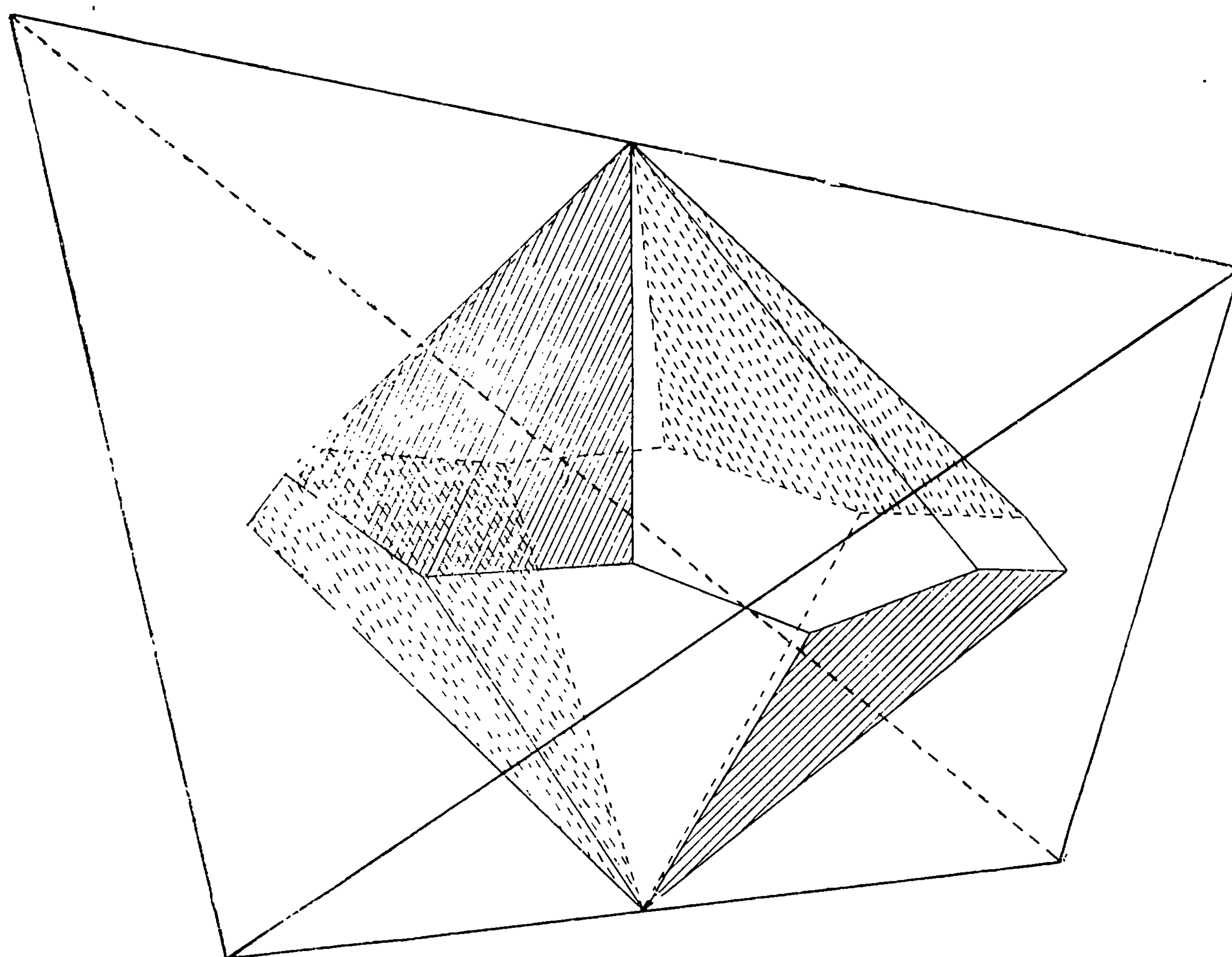
Законы мэроэдрии выражаются в правильном пропуске граней. Эти законы прежде всего подразделяются сообразно тому, какая часть граней остается в новом изоэдре; если остается $\frac{1}{2}$ граней, то законы изменения называются гемиэдрией, если остается $\frac{1}{3}$ граней — тритоэдрией, если остается $\frac{1}{4}$ граней — тетартоэдрией и т. д.

Мы здесь ограничимся указанием примеров, так как, очевидно, типический изоэдр, какому бы закону мэроэдрии ни был подвергнут, может дать только типический же. Что же касается нетипических изоэдров, то к ним эти законы оказываются или неприложимыми, или дают нетипические же изоэдры, относящиеся к тому же ряду, например, тетрапирамиды дают также тетрапирамиды с числом граней вдвое, втрое и т. д. меньшим. То же относится и к бискаленоэдрам.

Сравнивая фиг. 41 и 56, легко видеть, что один вид гемиэдрии из гексакис-октаэдра дает тетрагональный пентагон-изоэдр; сравнивая фиг. 41 и 51, легко видеть, что тот же гексакис-октаэдр, подвергнутый

другому закону гемиэдрии, дает косой триакис-октаэдр; наконец, сравнивая фиг. 41 и 40, легко видеть, что тот же гексакис-октаэдр, подвергнутый третьему закону гемиэдрии, дает гексакис-тетраэдр.

Простейший пример тритоэдрии представлен на фиг. 58. Легко видеть, что гексáгональный дельтоэдр, подвергнутый изменению по этому закону, дает сфеноэдр и в частном случае тетраэдр; на фиг. 59 для ясности показано, какому изменению подвергается при этом взаимный

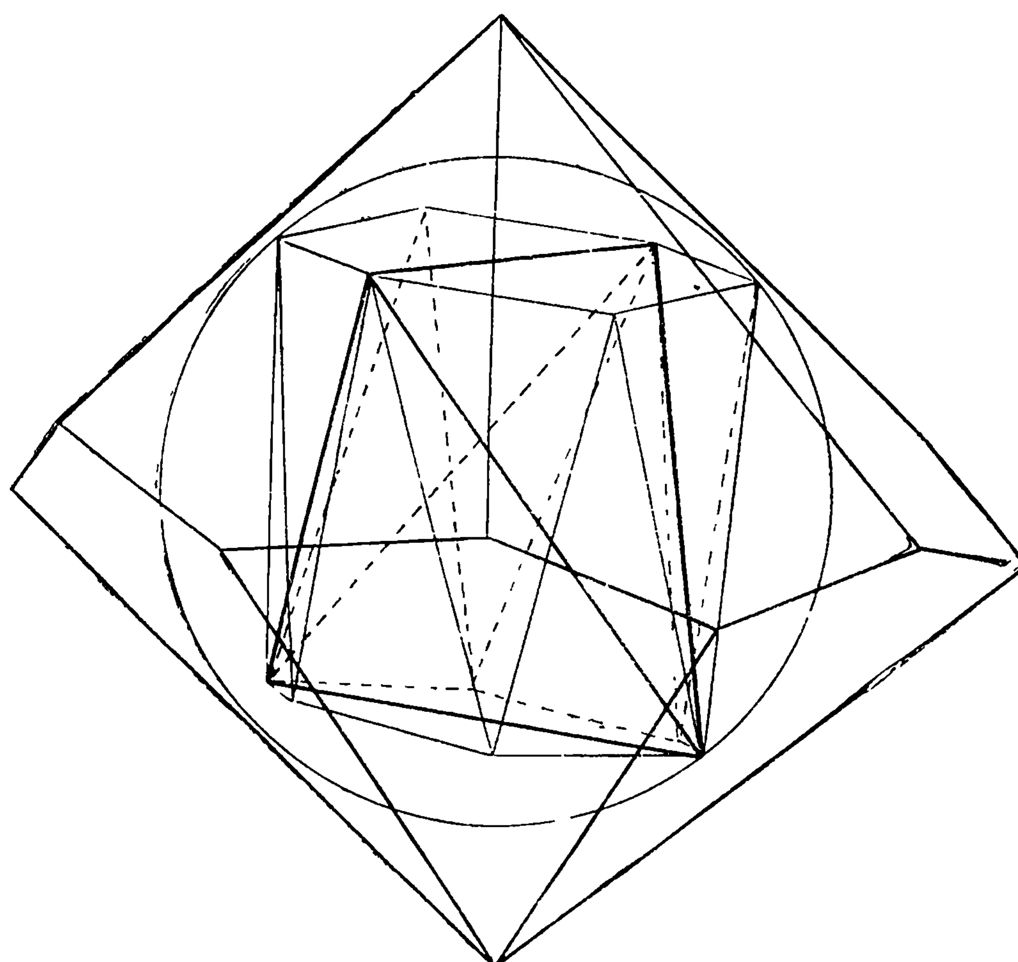


Фиг. 58.

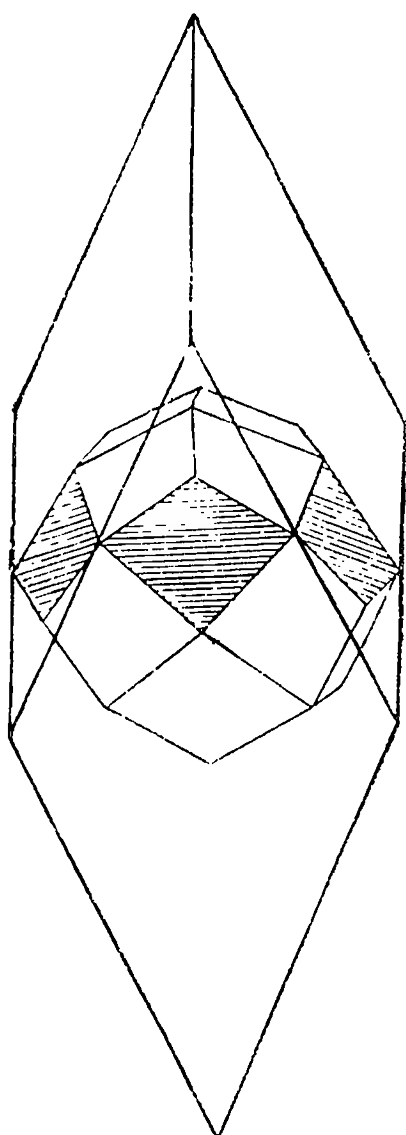
изогон — прямой гексагональный призмоид, также изменяющийся в сфеноэдр.

Один из простейших примеров тетартоэдрии представлен на фиг. 60, из которой видно, что триакис-октаэдр, подвергнутый известному виду тетартоэдрии, дает ромбоэдр; это заключение станет еще яснее, если обратиться к фиг. 50, из которой видно, что взаимный изогон изменится по этому закону в тригональный призмоид.[1]) Самый же поучительный

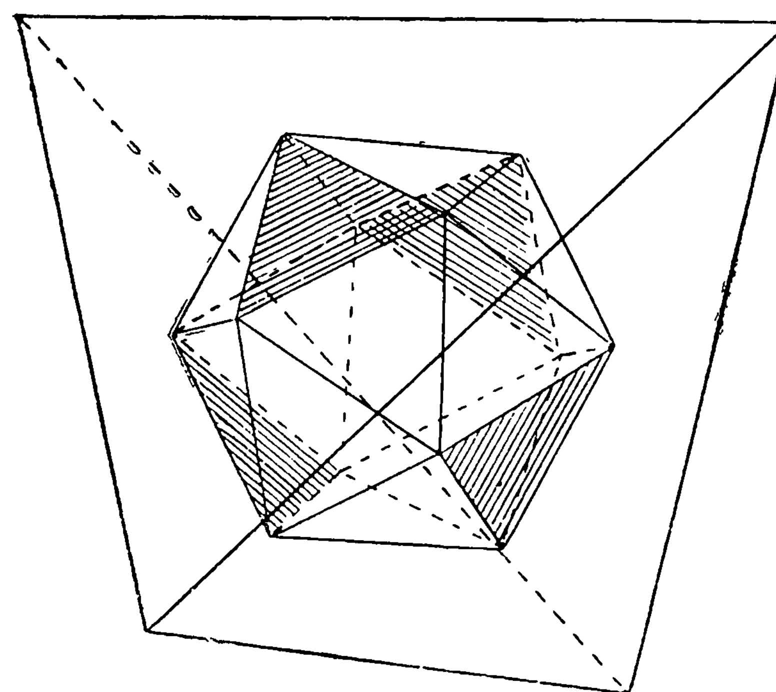
[1]) Случай этот интересен еще и в том отношении, что он взят из природы, а именно триакис-октаэдры хлористого калия при некоторых условиях кристаллизации получаются в виде одного или нескольких



Фиг. 59.



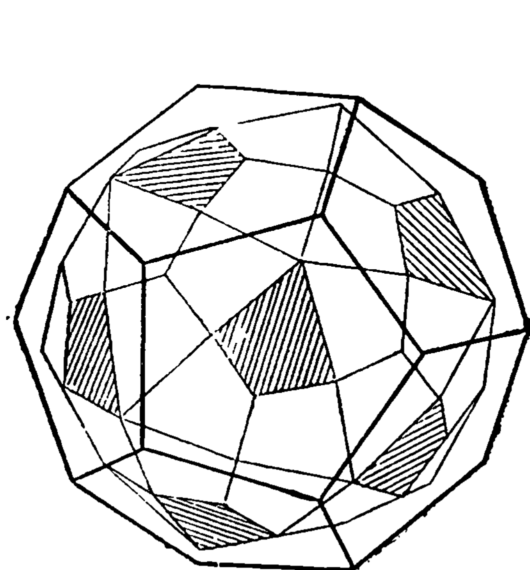
Фиг. 60.



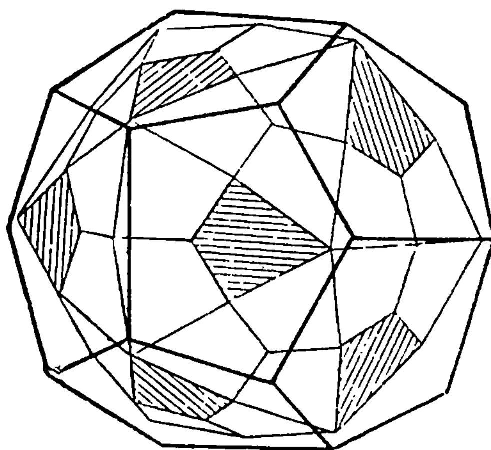
Фиг. 61.

правильно сросшихся между собою ромбоэдров. Этот факт, а также фигура заимствованы у А. Кнопа (Adolf K n o p. Molekularconstitution und Wachstum der Krystalle. 1867, стр. 50)

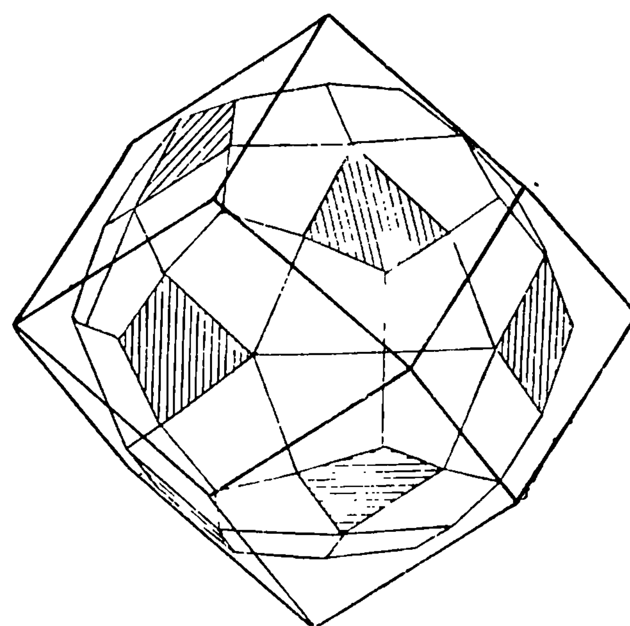
пример тетартоэдрии представляет изменение гексакис-октаэдра в косой тригональный пентагон-изоэдр, что нетрудно заметить, если сравнить фиг. 41 и 55. Наконец, на фиг. 61—64 изображены примеры пемптоэдрии: в одном случае правильный икосаэдр дает тетраэдр: в трех других случаях — триакис-икосаэдр, смотря по величине углов, дает правильный или пентагональный додекаэдр, или, наконец, ромбический додекаэдр.[1])



Фиг. 62.



Фиг. 63.



Фиг. 64.

Глава 7

КЛАССИФИКАЦИЯ МНОГОГРАННИКОВ[2])

§ 32. Определим, каким условиям должен удовлетворять многогранник, чтобы его грани или его гоноэдры были одноименны. Выразим с помощью формул (1)—(24) и (25a)—(25c)

[1]) Все эти случаи пемптоэдрии описаны в монографиях Филиппа Вакернагеля; из них же заимствованы и фигуры, а именно, фиг. 62—64 из „Ueber die Pemptoedrie der fünfglidrigen Leuzitoeder" (1854). Фиг. 61 взята из „Die Zerlegung (?) des Icosaeders in fünf Tetraeder" (1851). В „Die parallelflächige Pemptoedrie des fünfglidrigen Granatoeders (1856) показано, что ромбический триаконтаэдр, подвергнутый пемптоэдрии, дает куб, так что на самую фигуру можно смотреть, как на ядро, очерчивающееся при расположении известным образом пяти друг друга проникающих кубов. Между кристаллами серного колчедана имеются такие, формы которых напоминают ромбический триаконтаэдр, хотя они представляют в сущности комбинацию куба и преломленного пентагонального додекаэдра. В следующей главе мы подвергнем мэроэдрию более подробному изучению.

[2]) См. в приложении „О классификации многогранников".[45]

все части в зависимости от истинного числа вершин. Мы получим шесть групп, из которых уже одна первая заключает в себе все возможные многогранники; все другие представят частные случаи.

Для *тригоноэдрических* многогранников получим

$$a)\ n' = n;\quad b)\ f = \frac{n'}{2} + 2;\quad c)\ r = \frac{3n'}{2}. \tag{I}$$

Так как все входящие в эти формулы числа должны быть целые, то ясно, что n' должно быть четное, т. е. *истинное число вершин всех возможных многогранников есть число четное*. Наименьшее значение n', как мы знаем, есть 4; поэтому, означив через p какое-нибудь целое число, начиная от единицы, получим

$$n' = 2p + 2. \tag{Ia}$$

Для *тетрагоноэдрических* многогранников получим

$$a)\ n' = 2n;\quad b)\ f = \frac{n'}{2} + 2;\quad c)\ r = n' = \frac{4n'}{4}. \tag{II}$$

Наименьшее значение n', которое получим, решив одновременно уравнения b) и $f = 2(n-2) = n' - 4$, есть 12. Поэтому

$$n' = 2p + 10. \tag{IIa}$$

Однако, хотя выраженные этими формулами условия и необходимы, но легко видеть, что они недостаточны: так, например, многогранника, имеющего $n' = 14$ или, что все равно, $n = 7$, не существует, хотя невозможности его существования формулы (II) и не указывают. Известный уже нам ряд призмоидов занимает только половину всех мест, указываемых этими формулами, так что для него следует принять формулу

$$n' = 4p + 8. \tag{IIb}$$

Но этот ряд, как сейчас увидим, не обнимает еще всех относящихся сюда членов. В самом деле, легко видеть, что из каждого возможного тригоноэдрического многогранника мы получим тетрагоноэдрический, если примем за вершины

какие-нибудь точки, лежащие на ребрах первого (конечно, кроме самих вершин); таким образом, *существуют все те тетрагоноэдрические многогранники, кажущееся число вершин которых равно возможному истинному числу ребер.* Отсюда опять заключаем, что наименьшее кажущееся число вершин такого многогранника есть 6, т. е. наименьшее истинное 12; другими словами, опять приходим к роду октаэдра, так как наименьшее возможное число ребер (в сфеноиде) есть 6. Применяя указанный закон к ряду простых пирамид, получим ряд фигур, однородных с призмоидами и, следовательно, уже известных; из ряда же призм или бипирамид приходим к новому ряду, число вершин которых будет выражаться последовательно $3+3+3=9$; $4+4+4=12$, $5+5+5=15$, и вообще $n+n+n=3n$, где $n=2+p$. Таким образом, для этого ряда имеем выражение

$$n'=6(p+2)=6p+12, \qquad \text{(IIb')}$$

которое отчасти заполняет пробел формулы (IIb). Ясно, что второй член этого ряда будет фигура однородная с кубооктаэдром; поэтому назовем этот ряд *призмопирамидами*, так что особая тетрагональная призмопирамида и есть кубооктаэдр.

Для *пентагоноэдрических* многогранников получим

$$\text{a) } n'=3n;\ \text{b) } f=\frac{n'}{2}+2;\ \text{c) } r=\frac{5n'}{6}. \qquad \text{(III)}$$

Отсюда, подобно предыдущему, получим

$$n'=6p+30, \qquad \text{(IIIa)}$$

так как наименьшее n есть 12, т. е. наименьшее $n'=36$.

Само собою разумеется, что и эти условия, хотя и необходимы, но могут быть недостаточными; и в самом деле, до сих пор нам известны только 3 относящиеся сюда изогона — призмоэдры. Однако легко получить целый ряд новых многогранников, который, совершенно аналогично призмоидам, занимает половину всех мест, указываемых формулой. Чтобы

легче представить себе этот ряд, вообразим, что мы положили икосаэдр на горизонтальную плоскость (совершенно так же, как кладем октаэдр, чтобы представить его себе как член ряда призмоидов); тогда к его основанию (трехугольнику) будет примыкать слой граней числом 9; к этому слою — другой слой, опять числом 9; и только этот последний слой замыкается другим основанием; все число граней можно выразить поэтому так: $1+9+9+1=20$. Но вместо трехугольного основания мы можем взять четырехугольное и совершенно подобным же образом примыкать к нему слои трехугольников; тогда получим $1+12+12+1=26$; или пятиугольное основание; тогда получим $1+15+15+1=32$; или вообще n-угольное, для которого получим $1+3n+3n+1=2(3n+1)$, где $n=2+p$. Назовем этот ряд *бипризмоидами*; таким образом, икосаэдр есть первый член этого ряда, а именно тригональный бипризмоид. Число вершин членов этого ряда будет последовательно $3+6+3=12$; $4+8+4=16$; $5+10+5=20$ и вообще $n+2n+n=4n$, где $n=p+2$; отсюда получаем

$$n'=12(p+2)=12p+24. \qquad \text{(IIIb)}$$

Не трудно видеть, что оба призмоэдра высшего наименования, хотя и не относятся к этому ряду, но удовлетворяют формуле (IIIb).

Из этих многогранников и формул уже очень легко перейти к многогранникам с гранями одинакового наименования, так что можем прямо перейти к результатам.

Для *тригональных* многогранников получим

$$\text{a) } n=\frac{n'}{4}+3; \text{ b) } f=\frac{n'}{2}+2;$$

$$\text{c) } r=3\left(\frac{n'}{4}+1\right)=3\frac{n'}{4}+3, \qquad \text{(IV)}$$

причем

$$n'=4p. \qquad \text{(IVa)}$$

Для тетрагональных многогранников получаем

$$a)\quad n=\frac{n'}{2}+4\frac{2n'}{4}+4;\quad b)\ f=\frac{n'}{2}+2;$$

$$c)\quad r=n'+4=\frac{4n'}{4}+4, \qquad (V)$$

причем

$$n'=2p+6; \qquad (Va)$$

для ряда трапецоэдров

$$n'=4p+4; \qquad (Vb)$$

для ряда же, отвечающего призмопирамидам, второй представитель которого есть фигура однородная ромбическому додекаэдру и который назовем поэтому *додекаэдроидами* (значит, ромбический додекаэдр равен тетрагональному додекаэдроиду), получим

$$n'=6p+8. \qquad (Vb')$$

Для пентагональных многогранников получаем

$$a)\quad n=\frac{3n'}{4}+5;\quad b)\ f=\frac{n'}{2}+2;\quad c)\ r=\frac{5n'}{4}+5, \qquad (VI)$$

причем

$$n'=4p+16, \qquad (VIa)$$

для ряда же, отвечающего бипризмоидам, который мы назовем *пентагон-тетрапирамидами*

$$n'=8p+12. \qquad (VIb)$$

Ясно, что первый член этого ряда однороден с правильным додекаэдром.

Теперь выразим те же величины в зависимости от p.

a) $n'=2p+2$; b) $n=2p+2$; c) $f=p+3$; d) $r=3p+3$; (Ic)

a) $n'=2p+10$; b) $n=p+5$; c) $f=p+7$; d) $r=2p+10$. (IIc)

Для всех фигур, однородных с призмоидами, получим

a) $n'=4p+8$; b) $n=2p+4$; c) $f=2p+6$; d) $r=4p+8$. (IIc′)

Для всех фигур, однородных с призмопирамидами, получим

a) $n'=6p+12$; b) $n=3p+6$; c) $f=3p+8$;
d) $r=6p+12$; (IIc″)

a) $n'=6p+30$; b) $n=2p+10$; c) $f=3p+17$;
d) $r=5p+25$. (IIIc)

Для всех фигур, однородных с бипризмоидами, получим

a) $n'=12p+24$; b) $n=4p+8$; c) $f=6p+14$;
d) $r=10p+20$ (IIIc′)

(этим формулам удовлетворяют все 3 изогона — призмоэдры);

a) $n'=4p$; b) $n=p+3$; c) $f=2p+2$; d) $r=3p+3$; (IVc)

a) $n'=2p+6$; b) $n=p+7$; c) $f=p+5$;
d) $r=2p+10$. (Vc)

Для всех фигур, однородных с трапецоэдрами, получим

a) $n'=4p+4$; b) $n=2p+6$; c) $f=2p+4$;
d) $r=4p+8$. (Vc′)

Для всех фигур, однородных с додекаэдроидами, получим

a) $n'=6p+8$; b) $n=3p+8$; c) $f=3p+6$;
d) $r=6p+12$; (Vc″)

a) $n'=4p+16$; b) $n=3p+17$; c) $f=2p+10$;
d) $r=5p+25$. (VIc)

Для всех фигур, однородных с пентагон-тетрапирамидами, получим

a) $n'=8p+12$; b) $n=6p+14$; c) $f=4p+8$;
d) $r=10p+20$ (VIc′)

(этим формулам удовлетворяют все 3 пентагон-изоэдра).

Мы уже раньше видели, что все возможные многогранники исчерпываются 1-ю группою, если кажущееся число частей заменим истинным. В этом мы снова можем убедиться, рассматривая столбец формул а), так как величины n' в остальных случаях входят в число величин, удовлетворяющих формуле а) в (Ic). На основании этого, если бы мы пожелали выделить еще ступень в классификации, высшую чем порядок, то пришлось бы ограничиться формулами (Ic); эти же формулы приводят к разделению многогранников на два класса: а) класс *четнореберников*, для которых p число нечетное, и b) класс *нечетнореберников*, для которых p число четное. Так как p есть какое угодно целое число, то ясно, что эти два класса совершенно равны по числу членов или по объему, хотя в них обоих число членов — бесконечно-большая величина. *Первый* класс (т. е. класс четнореберников), кроме указанных двух общих признаков — нечетное p и четное r' (т. е. истинное число ребер), характеризуется еще четным числом граней, а применяя формулу Эйлера ($n+f=r+2$), видим, что и истинное число вершин должно быть четное, но, принимая во внимание формулу а) и (Ic), ясно, что n' должно быть не только четным, но еще и делиться на 4. Напротив того, в многогранниках, принадлежащих ко *второму* классу, число граней нечетное, число (истинное) ребер нечетное, и истинное число вершин, хотя и четное, но не делится на 4. Таким образом, самым существенным признаком класса является число граней; если оно четное, то многогранник относится к первому классу, если же оно нечетное, то многогранник принадлежит второму классу.

Очевидно, что наименование порядка упростится, если примем за основание число p, так что, например, тетраэдр отнесется к первому порядку первого класса, а трехгранная призма — ко второму порядку, принадлежащему второму классу; но еще проще принять для второго класса $p'=\frac{p}{2}$ и дать наименование в зависимости от p'; тогда та же трехгранная

призма отнесется к первому порядку второго класса; туда же отнесется и четырехгранная пирамида, так как для обеих фигур p' будет единица. Для первого же класса следует тогда принять за основание наименование $p''=\frac{p+1}{2}$.

Так как все изоэдры относятся к группам (IVc), (Vc') и (VIc'), т. е. особым рядам многогранников с одноименными гранями, и так как во всяком порядке, относящемся к первому классу, имеется изоэдр с трехугольными гранями и, начиная со второго, изоэдр с четырехугольными гранями, то самый класс можно назвать *классом изоэдров*, а второй класс, в котором ни один представитель не может быть изоэдром, можно назвать *классом анизоэдров* (т. е. неравногранников).

§ 33. Кроме общей и естественной классификации, обни мающей все возможные многогранники и имеющей в основании формулы (Ic), могут иметь значение и классификации частные и искусственные, обнимающие лишь ряд многогранников, обладающих каким-либо общим свойством, т. е. ряд гомологический. Таким образом, мы можем классифицировать многогранники с одноименными гоноэдрами или гранями; в основание такой классификации придется положить все формулы (Ic)—(VIc). Такая классификация уже не будет совмещать в себе всех возможных многогранников, а только сравнительно весьма незначительное число представителей, так как под нее подводятся только те (правда, важнейшие) частные случаи, которые связаны названным условием, и истинные числа для такой классификации уже не имеют значения, а только числа кажущиеся. Нетрудно видеть, что простейшие роды этих групп есть роды правильных многогранников. Эту законность можно выразить иначе; если величину p в вышеприведенных формулах мы назовем определителем, то можно сказать, что *роды правильных многогранников — те принадлежащие к рядам изогонов и изоэдров, у которых определитель равен единице.*

Прилагая эту классификацию ко всем упомянутым гомологическим рядам многогранников, мы получим следующую таблицу, в которой k означает наименование многогранника, то есть его место в ряду.

Многогранники

С одноименными гоноэдрами

Группа I

(Общая формула $n' = 2p + 2 = n$)

Ряд трапецоидальных призмоидов . . . . ($p = 2k - 1$)
„ дигональных призм . . . . ($p = 2k - 1$)
„ призм . . . . ($p = k - 1$)
„ усеченных дельтоэдров . . . . ($p = 2k - 1$)
„ притупленных дельтоэдров . . . . ($p = 4k - 1$)

Группа II

(Общая формула $n' = 4p + 8 = 2n$)

Ряд косых призмоидов . . . . ($p = k - 2$)
„ прямых призмоидов . . . . ($p = k - 2$)

Группа III

(Общая формула $n' = 12p + 24 = 3n$)

Ряд бипризмоидов . . . . ($p = k - 2$)

С одноименными гранями

Группа IV

(Общая формула $n' = 4p = 4(n - 3)$)

Ряд скаленоэдров . . . . ($p = 2k - 1$)
„ дигональных бипирамид . . . . ($p = 2k - 1$)
„ бипирамид . . . . ($p = k - 1$)

Ряд тетрапирамид . . . . ($p=2k-1$)
„ бискаленоэдров . . . . ($p=4k-1$)

Группа V

(Общая формула $n'=4p+4=2(n-4)$)

Ряд трапецоэдров . . . . ($p=k-2$)
„ дельтоэдров . . . . ($p=k-2$)

Группа VI

(Общая формула $n'=8p+12=\frac{4(n-5)}{3}$)

Ряд пентагон-тетрапирамид . . . . ($p=k-2$)

Эта таблица прямо приводит к выводу, что *каждому многограннику с одноименными гранями* (в том числе и изоэдру) *соответствует многогранник с одноименными гоноэдрами* (в том числе и изогон), *принадлежащий к соответственному ряду и имеющий то же наименование и тот же определитель, и наоборот.*

Каждый правильный многогранник зараз принадлежит двум группам, а именно: тетраэдр — к группам I и IV; октаэдр — к группам II и IV, а именно к ряду дигональных бипирамид и призмоидов, икосаэдр — к группам III и IV, а именно к ряду тетрапирамид и бипризмоидов; куб — к I и V, а именно к ряду призм и дельтоэдров; и, наконец, додекаэдр — к I и IV, а именно к ряду усеченных дельтоэдров и пентагон-тетрапирамид; и во всех случаях многогранники эти принадлежат к первым членам одного из этих рядов, а иногда и обоих. Поэтому все правильные многогранники можно получить, приравнивая общие формулы соответствующих групп; так, для многогранника, принадлежащего

к I и IV имеем $4(n-3)=n$, откуда $n=4$;
„ II и IV „ $4(n-3)=2n$, „ $n=6$;

к III и IV имеем $4(n-3)=3n$, откуда $n=12$;
„ I и V „ $2(n-4)=n$, „ $n=8$;
„ I и VI „ $4\left(\frac{n-5}{3}\right)=n$, „ $n=20$.

По поводу приведенной таблицы приходится остановиться только на двух рядах, о которых еще не было речи, а именно на усеченных и притупленных дельтоэдрах, представляющих тригоноэдрические многогранники. Легко составить себе о них представление по соответствию их с тетрапирамидами и бискаленоэдрами. Тетрапирамиды, как мы видели, состоят из трех слоев граней; в первом k граней, во втором $2k$ и в третьем k; при двух из вершин наименование гоноэдров k, а при остальных 5; наконец, фигуры эти образуются из прямых призмоидов насаживанием на оба их основания прямых пирамид. Поэтому усеченные дельтоэдры представляют три слоя вершин: два из них лежат при двух основаниях — k-угольниках; остальные же грани пятиугольники; все углы — тригоноэдры; наконец, образование этих фигур сводится к усечению двух вершин дельтоэдра. Бискаленоэдры ограничены тремя слоями граней; из них два сходятся при двух одиночных вершинах гоноэдров наименования $2k$ и двух слоях вершин гоноэдров последовательно наименования 4 и 5; из тетрапирамид они образуются через появление новых вершин тетрагоноэдров против ребер основания призмоида, из которого образуются эти фигуры. Поэтому притупленные дельтоэдры состоят из трех слоев вершин, два из которых лежат в двух основаниях и суть вершины многоугольников наименования $2k$; кроме этих двух оснований имеется два слоя граней, наименование которых последовательно 4 и 5; наконец, образуются эти фигуры из усеченных дельтоэдров через появление новых граней, лежащих против соответственных ребер дельтоэдра (сходящихся при вершине основного дельтоэдра, из которого эти фигуры образуются), т. е. притупляющих двугранные углы по этим ребрам. Мы уже знаем, что эти фигуры не могут быть изогонами, хотя тетрапи-

рамиды и бискаленоэдры — изоэдры, но изоэдры не типические.

В заключение обратим внимание еще на то, что возможны и иные искусственные классификации, некоторые из которых могут быть полезны. Так, например, возможна искусственная классификация индивидуальностей, основанная на видимом составе частей многогранника, независимо от того, типический он или нет. Фигуры, сближаемые такою классификацией, т. е. имеющие одно и то же число соответственно одноименных и одинаково расположенных частей, мы будем называть видимо однородными. Ясно, что видимо однородными фигурами могут быть фигуры, относящиеся к разным родам (и даже семействам), например все дисфеноиды видимо однородны; напротив того, фигуры, представляющие лишь разновидности, могут быть видимо разнородными, например: притупленный октаэдр, кубо-октаэдр и притупленный куб.

ОБЪЯСНЕНИЕ К ТАБЛИЦЕ ИЗОГОНОВ И ИЗОЭДРОВ (стр. 162—169)

Для лучшей иллюстрации сделанных нами выводов и для детального ознакомления со всеми выведенными нами типическими изоэдрами и подтипическими изогонами мы помещаем особую таблицу, естественно разделяющуюся на две равные части соответственных изоэдров и изогонов. В графах этой таблицы обозначены все важнейшие данные, характеризующие рассматриваемый многогранник.

Здесь нужно сделать следующие пояснения к таблице.

1) Для общих решений пришлось выразить все величины в зависимости от наименования, т. е. того порядка, в котором находится данный член по отношению к другим; это наименование означено через k, причем для трапецоидальных призмоидов и соответственных им скаленоэдров k — какое угодно целое число, начиная с 2, а во всех других случаях оно не меньше 3.

2) При каждом названии приведен римской цифрой номер класса и номер порядка в классе — обыкновенной, или в общих

решениях в зависимости от k. Из таблицы видно, что половина призм принадлежит I классу, а другая половина II; все же остальные решения относятся только к I классу. Из таблицы легко видеть также соотношение между наименованиями порядков в соответственных изогоне и изоэдре, если оба они относятся к I классу, а именно, для I и IV групп, если наименования означим соответственно через A и B, то $A = \frac{B+1}{2}$; если же A относится ко II классу, то $A = \frac{B}{2}$. Для II и V групп имеем $A = B+1$; для III и VI групп имеем $A = \frac{3}{2}(B+1)$. Отсюда уже выходит, что нет постоянного соотношения между двумя соответственными порядками; особенно поучительный пример представляют три изогона, помещенные под №№ 4, 6 и 12, относящиеся не только к одному и тому же порядку, но даже к одному и тому же виду, между тем соответственные с ними изоэдры относятся к двум совершенно различным порядкам I класса, а именно, к 11-му и 5-му. Точно также четырем изоэдрам, относящимся к 11-му, соответствуют изогоны, принадлежащие весьма различным порядкам, а именно I 6, I 12 и I 18.

3) Рассматривая величины гоноэдров-изогонов, мы имеем прежде всего возможность проверить выведенную нами зависимость между углами сфеноида и дисфеноида. В самом деле, так как $8G_t + 6G_o = 4d$,[46] то, определив G_t, легко определим и G_o, т. е. $\frac{36_o - 8G_t}{6} = 39$;[47] двугранные же углы октаэдра должны быть $180 - 70\frac{1}{2} = 109\frac{1}{2}$, а отсюда опять приходим к той же величине $G_o = 39$.[48] Затем, из формулы для гоноэдров призм легко определить, в каких случаях призмы могут выполнять пространство; стоит только определить, есть ли число $N = \frac{4d}{d\left(1 - \frac{2}{k}\right)} = \frac{4k}{k-2}$ число целое или нет; но не трудно видеть, что оно будет таковым только в трех случаях и

больше ни в каких других, а именно, при $k=3 (N=12)$, при $k=4 (N=8)$ и при $k=6 (N=6)$, т. е. складываться в пространстве могут только трехгранная, четырехгранная и шестигранная прямые призмы. Впрочем, этот вывод слишком очевиден, чтобы на нем останавливаться. Другое дело притупленный октаэдр; с первого раза трудно решить, представляют ли собою полученные 90° необходимую неточность черчения или даже вычисления, или же это величина математически точная. Однако, это недоразумение весьма просто разрешается следующим соображением: плоские углы центрального гоноэдра пирамидального куба в то же время и углы дополнительного гоноэдру притупленного октаэдра; поэтому, означив сумму этих плоских углов через ΣP, а величину гоноэдра через G, получим $G=2d-\frac{\Sigma P}{2}$, на основании известной уже нам теоремы.[49] Очевидно, однако, что $\Sigma P=2d$ как сумма углов тригоноэдра, которые могут быть развернуты таким образом, что ограничивающие эти углы стороны могут проходить через две противоположные вершины куба, а следовательно, слиться в одну прямую. Итак, *равные притупленные октаэдры могут через сложение выполнять пространство.* Оба же других изогона, относящихся к тому же самому виду, не обладают этим замечательным свойством.

Кроме этих выводов, непосредственно получающихся из таблицы, заслуживает внимания еще следующий, выводящийся из нее более сложным путем. Мы видим из таблицы, что гоноэдр сфеноэдра есть величина переменная; найдем ту величину, на которую делится нацело $4d$, т. е., другими словами, найдем сфеноэдр, могущий выполнять пространство.

Допустим, что мы его нашли, и пусть величина его гоноэдра $\frac{4d}{k}$. Расположим около одной точки все эти k сфеноэдров и опишем произвольным радиусом шаровую поверхность из взятой точки, как из центра. Пересечения ребер системы сфеноэдров с шаровою поверхностью примем за вершины некоторого тригонального многогранника, вписанного в шаре;

Название	Изогоны, вписан				
	подтипи				
	число граней	число вершин		число ребер	
		кажущееся	истинное	кажущееся	истинное
	I. Тригоноэдри				
1. *Сфеноэдр* I 1	4	4	4	6	6
Предельная форма: тетраэдр	4	4	4	6	6
2. *Трапецоидальный призмоид* I k	$2k+2$	$4k$	$4k$	$6k$	$6k$
Предельная цепь: прямая призма I $\frac{k}{2}$ и II $\frac{k-1}{2}$	$k+2$	$2k$	$2k$	$3k$	$3k$
3. *Притупленный тетраэдр* I 3	8	12	12	18	18
4. *Притупленный куб* I 6	14	24	24	36	36
5. *Притупленный додекаэдр* I 15	32	60	60	90	90
6. *Притупленный октаэдр* I 6	14	24	24	36	36
Особая цепь: притупленный дитетраэдр .	14	24	24	36	36
7. *Притупленный кубооктаэдр* I 12	26	48	48	72	72
8. *Притупленный додекаэдр-икосаэдр* I 30 .	62	120	120	180	180
9. *Правильный додекаэдр* I 5	12	20	20	30	30
10. *Притупленный икосаэдр* I 15	32	60	60	90	90

ные в шаре				
ческие				величина гоноэдра
сумма плоских углов при вершине	двугранные углы			
ческие изогоны				
$2d$	Переменные			Переменная
$2d$	$70\frac{1}{2}^{\circ}$	$70\frac{1}{2}^{\circ}$	$70\frac{1}{2}^{\circ}$	$15\frac{3}{4}^{\circ}$
$2d\left(2-\frac{1}{k}\right)$	Переменные			Переменная
$4d\left(1-\frac{1}{k}\right)$	90	90	$180\left(1-\frac{2}{k}\right)$	$90\left(1-\frac{2}{k}\right)$
$3\frac{1}{3}d$	$109\frac{1}{2}$	$109\frac{1}{2}$	$70\frac{1}{2}$	$54\frac{3}{4}$
$3\frac{2}{3}d$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	90	$80\frac{1}{4}$
$3\frac{13}{15}d$	$142\frac{2}{5}$	$142\frac{2}{5}$	$116\frac{3}{5}$	$110\frac{7}{10}$
$3\frac{2}{3}d$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$109\frac{1}{2}$	90
$3\frac{2}{3}d$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$109\frac{1}{2}$	90
$3\frac{5}{6}d$	$144\frac{3}{4}$	135	$125\frac{1}{4}$	$112\frac{1}{2}$
$3\frac{14}{15}d$	159	$148\frac{1}{4}$	$142\frac{2}{5}$	$134\frac{4}{5}$
$3\frac{3}{5}d$	$116\frac{3}{5}$	$116\frac{3}{5}$	$116\frac{3}{5}$	$84\frac{9}{10}$
$3\frac{13}{15}d$	$142\frac{2}{5}$	$142\frac{2}{5}$	$138\frac{1}{5}$	$121\frac{1}{2}$

Название	Изогоны, вписан				
	подтипи				
	число граней	число вершин		число ребер	
		кажущееся	истинное	кажущееся	истинное
	II. Тетрагоноэдри				
11. *Призмоид* *Предельная серия*: прямой *призмоид* I *k* .	$2k+2$	$2k$	$4k$	$4k$	$6k$
12. *Кубо-октаэдр* I 6 . .	14	12	24	24	36
Особая цепь: кубодитетраэдр	14	12	24	24	36
13. *Додекаэдро-икосаэдр* I 15	32	30	60	60	90
14. *Тетрагоноэдрический притупленный кубооктаэдр* I 12	26	24	48	48	72
15. *Тетрагоноэдрический притупленный додекаэдро-икосаэдр* I 30	62	60	120	120	180
	III. Пентагоноэдри				
16. *Призмоэдр:*					
a) тригональный I 9 .	20	12	36	30	54
b) тетрагональный I 18	38	24	72	60	108
c) пентагональный I 45	92	60	180	150	270

(Продолжение)

ные в шаре					
ческие					
сумма плоских углов при вершине	двугранные углы				величина гоноэдра
ческие изогоны					
$4d\left(1-\frac{1}{k}\right)$	Переменные				Переменная
$3\frac{1}{3}d$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$70\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{3}d$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$125\frac{1}{4}$	$70\frac{1}{2}$
$3\frac{11}{15}d$	$142\frac{2}{5}$	$142\frac{2}{5}$	$142\frac{2}{5}$	$142\frac{2}{5}$	$104\frac{4}{5}$
$3\frac{2}{3}d$	Переменные				Переменная
$3\frac{13}{15}d$	159	159	$148\frac{1}{4}$	$148\frac{1}{4}$	$127\frac{1}{4}$
ческие изогоны					
$3\frac{1}{3}d$	Перемеиные				Переменная
$3\frac{2}{3}d$	»				»
$3\frac{13}{15}d$	»				»

Название	Число граней	Изоэдры, описан			
		типиче			
		число вершин		число ребер	
		кажущееся	истинное	кажущееся	истинное
		IV. Тригональ			
1. *Сфеноэдр* I 1	4	4	4	6	6
Предельная форма: тетраэдр	4	4	4	6	6
2. *Скаленоэдр* I $2k-1$.	$4k$	$2k+2$	$4(2k-1)$	$6k$	$6(2k-1)$
Предельная серия: Бипирамида I $k-1$.	$2k$	$k+2$	$4(k-1)$	$3k$	$6(k-1)$
3. *Пирамидальный тетраэдр* I 5	12	8	20	18	30
4. *Пирамидальный* октаэдр I 11	24	14	44	36	66
5. *Пирамидальный икосаэдр* I 29	60	32	116	90	174
6. *Пирамидальный куб* I 11	24	14	44	36	66
Особая серия: гексакис-тетраэдр	24	14	44	36	66
7. *Гексакис-октаэдр* I 23	48	26	92	72	138
8. *Гексакис-икосаэдр* I 59	120	62	236	180	354
9. *Правильный икосаэдр* I 9	20	12	36	30	54
10. *Пирамидальный додекаэдр* I 29	60	32	116	90	174

Продолжение

ные около шара						
ские						величина центрального гоноэдра
плоские углы центрального гоноэдра			двугранные углы центрального гоноэдра			
ные изоэдры						
Переменные			Переменные			90°
$109\frac{1}{2}°$	$109\frac{1}{2}°$	$109\frac{1}{2}°$	120°	120°	120°	90
Переменные			$\frac{2d}{k}$	Переменные		$\frac{90}{k}$
90	90	$\frac{360}{k}$	90	90	$\frac{360}{k}$	$\frac{18}{k}$
$70\frac{1}{2}$	$70\frac{1}{2}$	$109\frac{1}{2}$	60	60	120	30
$54\frac{3}{4}$	$54\frac{3}{4}$	90	45	45	120	15
$37\frac{3}{5}$	$37\frac{3}{5}$	$63\frac{2}{5}$	36	36	120	6
$54\frac{3}{4}$	$54\frac{3}{4}$	$70\frac{1}{2}$	60	60	90	15
$54\frac{3}{4}$	$54\frac{3}{4}$	$70\frac{1}{2}$	60	60	90	15
$35\frac{1}{4}$	45	$54\frac{3}{4}$	90	60	45	$7\frac{1}{2}$
21	$31\frac{3}{4}$	$37\frac{3}{5}$	90	60	36	3
$63\frac{2}{5}$	$63\frac{2}{5}$	$63\frac{2}{5}$	72	72	72	18
$37\frac{3}{5}$	$37\frac{3}{5}$	$41\frac{4}{5}$	60	60	72	6

Название	Число граней	Изоэдры, описан типиче число вершин кажущееся	число вершин истинное	число ребер кажущееся	число ребер истинное
		V. Тетрагональ			
11. *Трапецоэдр* I $k-1$ . . *Предельная серия:* дельтоэдр	$2k$	$2k+2$	$4(k-1)$	$4k$	$6(k-1)$
12. *Ромбический додекаэдр* I 5 . . . . *Особая серия*: Дельтоид-додекаэдр	12	14	20	24	30
13. *Ромбический триаконтаэдр*	30	32	56	60	84
14. *Триакис-октаэдр* I 11 . (Преломленный пентагональный додекаэдр)	24	26	44	48	66
15. *Триакис-икосаэдр* I 29	60	62	116	120	174
		VI. Пентагональ			
16. *Пентагон-изоэдр:*					
a) тригональный I 5 . .	12	20	20	30	30
b) тетрагональный I 11	24	38	44	60	66
c) пентагональный I 29	60	92	116	150	174

(Продолжение)

ные около шара								
ские								величина центрального гоноэдра
плоские углы центрального гоноэдра					двугранные углы центрального гоноэдра			
ные изоэдры								
Переменные				$2d$	Переменные			$\frac{180}{k}$
$54\frac{3}{4}$	$54\frac{3}{4}$	$54\frac{3}{4}$	$54\frac{3}{4}$	120	120	90	90	30
$37\frac{3}{5}$	$37\frac{3}{5}$	$37\frac{3}{5}$	$37\frac{3}{5}$	120	120	72	72	12
Переменные				120	90	Переменные		15
21	21	$31\frac{3}{4}$	$31\frac{3}{4}$	120	90	90	72	6
ные изоэдры								
Переменные				120	120	Переменные		30
»				120	90	»		15
»				120	72	»		6

ясно, что этот многогранник будет изоэдр, коего центральный гоноэдр есть $\frac{4d}{k}$, а сумма плоских углов этого гоноэдра равна $2d$ — условие общее для гоноэдров всех сфеноэдров. Просматривая таблицу, легко убедиться, что этому условию удовлетворяет только пирамидальный куб. Итак, плоские углы нашего феноэдра будут $54\frac{3}{4}$, $54\frac{3}{4}$ и $70\frac{1}{2}^\circ$ (приблизительно), т. е. наш сфеноэдр равнобедренный и двугранные его углы будут (точно) 60, 60 и 90°, а величина его гоноэдра 15°, т. е. $k = 24$.

Теперь посмотрим, какую фигуру на самом деле произведет система из 24 таких сфеноэдров, расположенных около одной точки. Ясно, что, так как двугранные углы, имеющие ребром длиннейшую сторону трехугольника грани сфеноэдра, равны 90°, то около этого ребра грани двух прилежащих сфеноэдров сливаются в одну, а именно ромб, так как теперь все стороны образовавшегося четырехугольника будут равны между собою, т. е. система 24 таких *сфеноэдров* образует *ромбический додекаэдр*. Ввиду исключительности такого сфеноэдра, он заслуживает названия *особого сфеноэдра*.

Нельзя не видеть в этом свойстве ромбического додекаэдра разлагаться на особые сфеноэдры аналогии с правильным шестиугольником на плоскости разлагаться на правильные трехугольники, так же как не видеть аналогии куба в пространстве с квадратом на плоскости, так что, казалось бы, можно написать ряд аналогических фигур в пространстве: особый сфеноэдр, куб, ромбический додекаэдр; на плоскости: правильный трехугольник, квадрат, правильный шестиугольник. Однако, нужно заметить, что свойства всех фигур в пространстве гораздо разнообразнее, чем аналогических им фигур на плоскости, так что самая аналогия разветвляется по отдельным свойствам. Например, на плоскости мы знаем только один ряд правильных фигур, которые играют в одно и то же время роль и равносторонников, и равноугольников. В пространстве эти две роли разъединены и соединяются только в несколь-

ких исключительных случаях (простейших членах рядов); но зато как изоэдров, так и изогонов существует уже не один ряд, а несколько, и в каждом члене каждого ряда — целая серия постепенно изменяющихся фигур. То же мы замечаем и по отношению к другим свойствам: правильному трехугольнику на плоскости, как равноугольнику и равностороннику, соответствует целая серия сфеноэдров с безграничным числом членов; из этой серии правильный тетраэдр представляет пример столь развитой правильности, какая не может существовать на плоскости, но он не выполняет пространства подобно правильному трехугольнику, выполняющему плоскость. Но зато в этой серии имеется особый сфеноэдр, удовлетворяющий этому условию. Если ромбический додекаэдр аналогичен правильному шестиугольнику, как равностороннику, то правильный притупленный октаэдр аналогичен ему же, как равноугольнику, и притом, аналогично ему же, выполняет пространство; кубо-октаэдр в свою очередь аналогичен шестиугольнику, как такая фигура, центральные гоноэдры которой суть гоноэдры правильных многогранников, а также в том отношении, что его ребро равно радиусу описанного шара; октаэдр опять аналогичен тому же шестиугольнику, как фигура, очерчивающаяся при пересечении двух тетраэдров, и т. д. Эти примеры ясно показывают, как надо понимать аналогию между фигурами на плоскости и в пространстве.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЗАМЕТКА (к стр. 118)

Подобно тому, как мы вывели для тригоноэдрических изогонов формулу $n = \frac{2}{\frac{1}{i} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} - \frac{1}{2}}$, мы получим для изогонов с одними двугранными углами $n = \frac{2}{\frac{1}{i} + \frac{1}{k}}$, а для изогонов, у которых телесный угол превращается в прямую, $n = \frac{2}{+1} = 2$. В первом случае изогон есть плоский многоугольник, а во втором — отрезок прямой. Случая же одногранного гоноэдра допустить нельзя, так как, если есть одна грань,

то должна быть и другая, примыкающая к ней с другой стороны и в частном случае сливающаяся с нею. Этот последний случай и есть случай плоского многоугольника, и для него, очевидно, $i = k$, а потому $n = \frac{2}{\frac{2}{i}} = i$. Этот вывод станет понятен, если в общем решении призм и бипирамид мы представим себе, что ось их растянулась до бесконечности. Бипирамиды превращаются в открытые призмы, а призмы — в плоские многоугольники. Если же, напротив того, ось укорачивается до нуля, то бипирамида превращается в пару параллельных плоскостей, а призма — в отрезок прямой. Этот случай можно рассматривать как частный случай предыдущего, а именно, когда $k = 2$, т. е. когда плоский многоугольник превращается в отрезок прямой. При этом и $n = 2$.

Таким образом, кроме выведенных, нужно принять еще одно общее решение изоэдров — открытых призм и изогонов — плоских многоугольников и одно частное решение изоэдров — пары параллельных плоскостей и изогонов — отрезки прямой. Что эти решения действительно суть решения изоэдров и изогонов, в этом особенно наглядно убедимся в следующем отделе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О классификации многогранников (к стр. 148)

Что касается классификации многогранников, были выражаемы мнения, что ее следует основать не на числе граней, но на числе ребер, а именно, на том основании, что для всякого многогранника, имеющего f граней и n вершин, найдется соответственно другой (ему взаимно полярный), имеющий n граней и f вершин, между тем как число ребер у обоих одинаково.

Это мнение высказал, между прочим, К. Жордан (см. Recherches sur les polyèdres. Crelle Journ., т. 66, 1866), который и представил попытку установить классификацию многогранников. Он разделяет многогранники на 9 классов по степени симметрии, а каждый класс — на порядки по числу ребер. Но его классификация, очевидно, не выдерживает никакой критики, так как симметрия представляет собою свойство индивидуальных фигур, так что бесконечно малое изменение всякого многогранника, к какому бы классу он ни относился по системе Жордана, всегда приводило бы к необходимости отнести к 9-му классу, не обладающему никакой симметрией. Другими словами, все многогранники вообще принадлежали бы этому последнему классу, и лишь ничтожное

число чрезвычайно частных случаев могло бы быть отнесено к другим восьми классам.

Гораздо более убедительным представляется с первого раза соображение Бретона, схема которого была приведена нами выше (стр. 114). Ясно, что если, как это вытекает из его схемы (т. е. из формулы Эйлера), грани и вершины играют совершенно одну и ту же роль, то классификация по одному из этих элементов будет *односторонняя*. Но я уже указывал на то, что схема его далеко не обнимает собой всех возможных численных отношений многогранников; и если одни из точек его схемы выражают совокупность видимо однородных фигур, а другие — даже несколько или даже весьма много таких групп, то, следовательно, и сама схема не может служить основанием классификации.

Если основать классификацию на числе ребер, то пришлось бы разделить всю совокупность многогранников на три класса, так как такая именно периодичность имеет место в числовых элементах многогранников по схеме Бретона; через это мы лишились бы той гармонии, которая представляется в делении многогранников на два класса. Пришлось бы также отбросить понятие о типических многогранниках, а следовательно, игнорировать многочисленные сделанные раньше и следующие дальше выводы, основанные на допущении этого понятия.

Я уже не говорю о практическом значении классификации по граням и самого понятия типического многогранника, так как формы, встречающиеся в природе, не имеют постоянного, но, напротив того, бесконечно изменяющееся положение граней, остающихся, однако, всегда параллельными. То же самое преимущество классификация по граням представляет и по отношению к вычислению угловых элементов, которые определяются направлениями нормалей к граням и не находятся в зависимости от случайного положения вершин или ребер.

В последних двух отношениях классификация по граням не может быть заменена, повидимому, равноправною с нею классификацией по вершинам, так как ни в природе, ни для целей вычисления нельзя определить *виды* многогранника числом и положением вершин. Поэтому самая *односторонность* классификации по граням есть только *кажущаяся*.

Не имея возможности подробно излагать здесь преимуществ, делающих классификацию по граням *единственно возможной* общей классификацией, я выражу только уверенность в том, что всякий, прочитавший предлагаемое произведение, согласится в этом со мною. Вот почему я считаю ее *естественной* классификацией, т. е. такой, которая имеет преимущества перед другими *во всех отношениях*. К тому же она и единственная древняя классификация.

В связи с вопросом о классификации находится вопрос о числе подразделений каждой ее ступени. Вопрос этот был поднят с того самого

момента, когда уяснились общие численные отношения, существующие между элементами многогранника, т. е. в статьях самого Эйлера. В его „Elementa doctrinae solidorum“ (Novi Com. Petrop., т. 4, стр. 136, 1758) сделано перечисление возможных видимых родов многогранников, имеющих число вершин, начиная от 4 до 10, т. е. он был склонен классифицировать многогранники по вершинам (что легко объясняется выведенной им зависимостью между числом вершин и суммой плоских углов многогранника). Затем, пример подобного перечисления мы находим в статье „Note sur la théorie des polyèdres“ (C. r., т. 46, стр. 70). Принимая за основание классификацию по граням, знаменитый математик приводит разнообразные фигуры (числом 10), в которых может явиться 10-гранник. Затем, о том же, как я уже упоминал, трактует Бретон, основывая свою классификацию на числе ребер.

Однако, не говоря уже о том, что все эти авторы имеют дело лишь с видимыми родами, а не с типическими представителями, они игнорируют возможность тех отношений, которые представляются нам, например, в пирамидальном кубе, октаэдре и дигексагональной бипирамиде, так как в их перечислениях группа таких фигур является в качестве одного представителя. Так как, например, типические представители каждой из приведенных трех фигур составляют бесконечную серию видов, то соединение их всех в один род произвело бы лишь затемнение существующих отношений. Вот почему в этих трех фигурах я вижу представителей трех родов. Но их можно соединить в одно семейство. При этом условии упомянутые выше перечисления (если отнести их к типическим представителям) сведутся к перечислению семейств в порядке, но не родов, и тогда наша классификация по граням примет вид:

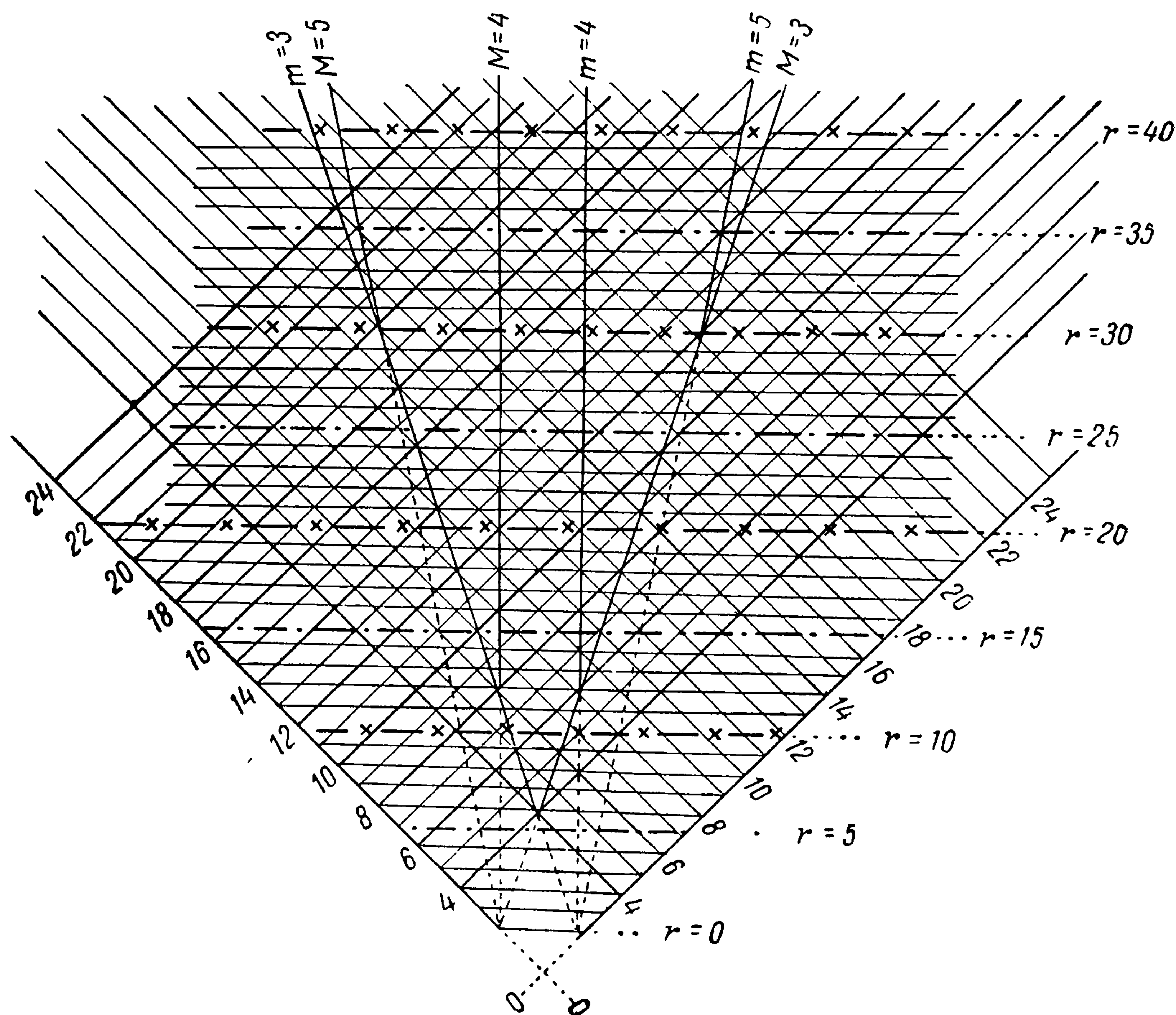
I класс

1	порядок	содержит	1 семейство
2	„	„	4 семейства
3	„	„	7 семейств
4	„	„	10 „
. . .	. . .	. . .	. . .
q-тый	„	„	$3q-2$ „

II класс

1	порядок	содержит	2 семейства
2	„	„	5 семейств
3	„	„	8 „
4	„	„	11 „
. . .	. . .	. . .	. . .
q-тый	„	„	$3q-1$ „

Эту табличку можно сделать еще более поучительной, если по схеме Бретона различать крайние семейства (т. е. тригональные и тригоноэдрические многогранники), среднее семейство, соответствующее прямой, по отношению к которой представляется симметричной сама схема, и промежуточные семейства. Тогда для многогранника I класса порядка q



Фиг. 65.

будут всегда иметься оба крайние и одно среднее семейство, число правых промежуточных семейств будет $2q-3$, а число левых $q-2$; все это легко видеть из схемы Бретона (фиг. 65); сумма семейств будет значить $3q-2$ (для сфеноида оба крайние и одно среднее семейства сливаются в одно). Для многогранников же II класса порядка q всегда имеется среднее и крайнее правое семейства; промежуточных правых будет $2q-2$, а левых $q-1$; сумма будет $3q-1$.

Что касается вопроса о числе родов в семействе, то он остается нерешенным. Однако, весьма возможно, что решение это будет иметь

связь с уже хорошо разработанным вопросом о числе способов разложить плоский многоугольник на трехугольники посредством диагоналей. Этот вопрос также ведет свое начало от Эйлера, не опубликовавшего своего решения, ставшего известным лишь благодаря сделанной им устной передаче. Затем, вопросом этим занималась Сегнер (Segner, Novi Com. Petrop., т. 7, стр. 203), Ламе (Lamé, Ann. de math. par Liouville, т. 3, стр. 505), Олинд Родриг (Olinde Rodrigues, там же, т. 3, стр. 547), Бинэ (Binet, там же, т. 4, стр. 79), Каталан, (Catalan, там же, т. 4, стр. 91).

В заключение остается упомянуть о некоторых своеобразных попытках классификации, вряд ли, впрочем, заслуживающих внимания. Для примера можно указать на классификацию Хоппе (E. Hoppe, Grunert Arch., 58, стр. 328), по которой за основание классификации (классов) принимается наибольшее наименование гоноэдра теоретического многогранника. Очевидно, что классификация эта еще в большей степени, чем упомянутые другие, грешит в том, что соединяет в одно весьма различные и разъединяет чрезвычайно близкие фигуры.

ОТДЕЛ III

УЧЕНИЕ О СИММЕТРИИ



Глава 8

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ О СИММЕТРИИ И СОЕДИНЕНИИ ФИГУР ПО ЭТОМУ ПРИЗНАКУ В СИСТЕМЫ[1])

§ 34. Определение I. Осью симметрии называется такая прямая, вращением около которой можно произвести совпадение нового положения фигуры с первоначальным.

Теорема 1. *Угол, на который можно повернуть фигуру, чтобы произвести совпадение нового ее положения с первоначальным, есть делитель $4d$.*

Примечание. Термин „делитель“ имеет здесь чисто геометрическое, а не числовое значение; например $51\frac{3}{7}^\circ$ есть геометрический делитель $4d$, т. е. 360°, так как этот угол укладывается в последнем целое число раз, а именно 7.

Пусть наименьший угол поворота, при котором происходит совпадение двух положений фигуры, есть α. Ясно, что если мы произведем 2, 3 и т. д. таких поворотов, мы всегда получим совпадение, именно потому, что при всяком предыдущем положение фигуры тожественно с первоначальным. Если бы ни один из кратных углов не был $4d$, то, взяв такое n, чтобы $4d - n\alpha < \alpha$, мы получили бы, что фигура может повернуться около оси на угол меньший чем α, давая в обоих положениях полное совпадение, а это противоречит

---

1) Историческую заметку об этом отделе см. в первом приложении к нему.[50]

первоначальному допущению, т. е., что α есть наименьший такой угол.

Примечание. Сообразно смыслу этой теоремы, оси симметрии с одинаковым удобством могут быть наименованы как по тому геометрическому делителю $4d$, который представляет собой наименьший угол поворота, так и по тому числовому множителю, произведение которого с этим углом дает $4d$. Поэтому различаем двойную ось с наименьшим углом поворота в 180°, тройную — с наименьшим углом поворота в 120° и т. д.

Следствие. Ось симметрии наименования n есть в то же время и ось, имеющая наименованием какой-нибудь числовой делитель числа n. Пусть $n = abcd\ldots k$. Мы говорим, что ось наименования n есть в то же время и ось наименования a, b, c,...; ab, ac, bc,...; abc,... Это вытекает из того, что угол наименьшего поворота при оси, имеющей наименованием делителя числа n, есть угол, кратный углу наименьшего поворота при оси наименования n. В самом деле, наименьший угол поворота при оси наименования n есть $\alpha = \frac{4d}{n} = \frac{4d}{abcd\ldots k}$; наименьший же угол поворота оси, имеющей наименованием какой-нибудь делитель, например bc, есть $\beta = \frac{4d}{bc}$, а отсюда $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{abcd\ldots k}{bc} = ad\ldots k$ или $\beta = a\ldots k\cdot\alpha$, а поворот на этот угол β при оси наименования n есть лишь совокупность поворотов на угол α.[51]

Определение 2. Такие оси, совмещением которых возможно совместить и самые фигуры, называются равными.

Примечание. Какие-нибудь две пересекающиеся неравные друг другу оси данного положения и наименования определяют собою положения двух систем соответственно равных осей.

Пусть даны две пересекающиеся оси A и B наименования a и b. Вращением около оси A получим a положений оси B; вращением около каждой из полученных

осей B мы получим для каждой из них b положений на A; причем некоторые из выведенных положений могут совпадать друг с другом. Продолжая поступать таким образом, мы должны получить совокупность осей A и B, пересекающихся в одной точке, и притом каждое положение одной из осей, например A, может быть выведено из другого поворотами около осей B, и наоборот.

То же рассуждение приложимо и ко всякой третьей оси C и т. д., т. е. вообще все равные оси фигуры группируются в системы, обладающие указанным свойством.

Теорема 2. *Оси симметрии всякой сомкнутой фигуры пересекаются в одной точке.*[1])

Каждое сечение фигуры плоскостью, перпендикулярною к оси симметрии, дает плоскую фигуру, для которой та же ось есть также ось симметрии; поэтому каждой точке этой фигуры соответствует n других точек, если n — наименование осей, образующих в совокупности правильный n-угольник, центр которого есть точка пересечения плоскости осью. Так как центр тяжести каждой такой группы точек есть одна и та же точка, то она же служит центром тяжести всей плоской фигуры, а потому центр тяжести данной фигуры должен находиться на оси симметрии, а значит, все оси симметрии пересекаются в центре тяжести фигуры, т. е. в одной точке.

Примечание. В учении о симметрии точку эту называют центром симметрии, и, значит, все оси симметрии фигуры всегда должны проходить через этот центр.[52]

§ 35. Определение 3. Элементарной фигурой, имеющей данные оси симметрии, называется такая, которая получится, если мы на оси одной системы, например, A, какой-нибудь данной фигуры возьмем произвольную точку и затем, получив положение соответственных точек на всех других

---

[1]) Приводится доказательство, предложенное Браве.

равных осях посредством вращения около всех других осей той же фигуры, примем эти точки за вершины фигуры.[1])

Примечание. Определение это предполагает, что при приведенных условиях на каждой оси системы *A* получится лишь одна точка. Предположение это, однако, есть результат самого понятия об осях симметрии, так как, около какой бы оси мы ни вращали фигуру, чтобы привести к совпадению два положения оси *A*, всегда при этом происходит и полное совпадение самой фигуры, а значит, и всех соответственных точек осей. Очевидно, что все эти точки будут находиться на поверхности шара, центр которого есть точка пересечения осей, и, значит, элементарная фигура есть подтипический многогранник.

Теорема 3. *Элементарная фигура есть подтипический изогон.*[53]

Из только что приведенного примечания мы знаем, что фигура эта есть подтипический многогранник. Кроме того, так как все оси, на которых находятся вершины элементарной фигуры, равны, то, значит, производя совпадение этих осей, мы приведем к совпадению и различные положения фигуры, а следовательно, и гоноэдры, и, значит, гоноэдры равны между собой.

Примечание. Из самого способа образования элементарного изогона следует, что в нем имеются все те оси симметрии, которые имеются и в той фигуре, из которой он выведен.

На основании только что доказанной теоремы можно вывести все возможные системы осей из рассмотрения выведенных раньше подтипических изогонов. Однако вывод осей симметрии облегчится дальнейшими соображениями.

Определение 4. Типический изоэдр, соответствующий элементарному изогону, называется элементарным изоэдром.

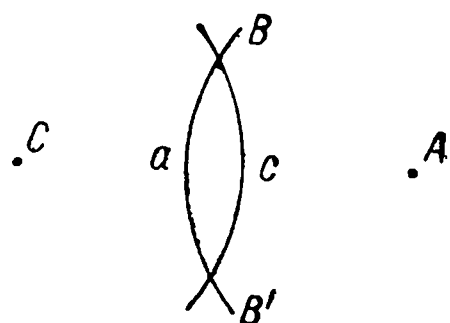
---

[1]) Намек на такого рода понятие мы находим у Мебиуса в его определении Grundfigur (Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle. Crelle Journ., т. 43, стр. 368).

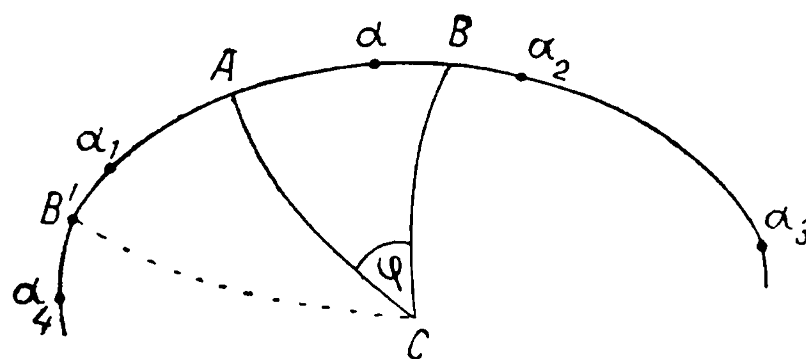
Примечание. Ясно, что грани элементарного изоэдра перпендикулярны к осям симметрии одной и той же системы.

§ 36. Теорема 4. *Плоскость, проходящая через две оси, есть плоскость симметрии относительно самих осей.*

Докажем, что плоскость, проходящая через две оси A и C (фиг. 66), есть плоскость симметрии относительно какой угодно другой оси B. Вращая ось B около A, получим на сфере дугу BaB', на которой должна находиться ось той же системы B. Рассуждая так же, мы найдем, что ось той же системы B должна находиться и на дуге BcB', описанной



Фиг. 66.



Фиг. 67.

около оси C. Так как эти две дуги, кроме точки B, должны пересечься только в одной точке B', то, значит, B' может быть такой осью. Она должна быть ею, потому что к осям A и C представляет то же отношение, что ось B_1 к осям A_1 и C_1, если со значками мы означим те же оси, рассматриваемые с противоположной стороны сферы.

Примечание.[54] Эта теорема не приложима к случаю, если хоть одна из осей (A или C) двойная; кроме того, последнее соображение не имеет места, если оси A и C равны.

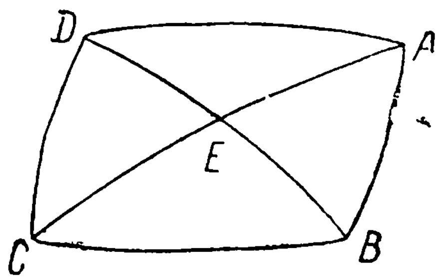
Теорема 5. *Прямая пересечения двух плоскостей симметрии есть ось симметрии.*[1])

Пусть две дуги AC и BC (фиг. 67) выражают на сфере две плоскости симметрии, и пусть угол между ними есть φ.

[1]) Легко видеть, что теорема эта по своему смыслу совпадает с известной теоремой оптики о пересекающихся зеркалах.

Возьмем какой-нибудь радиус-вектор α, а пусть α_1 — радиус, ему симметричный по отношению к плоскости AC, а α_2 — то же по отношению к плоскости BC; пусть, далее, α_3 — радиус, симметричный α_1 по отношению к плоскости BC и α_4 — радиус, симметричный α_2 по отношению к плоскости AC. Ясно, что все эти радиусы должны находиться на одной и той же дуге, центр которой есть точка C. По построению имеем $A\alpha = A\alpha_1$ и $A\alpha_2 = A\alpha_4$; следовательно, $\alpha\alpha_2 = A\alpha_2 - A\alpha = A\alpha_4 - A\alpha_1 = \alpha_1\alpha_4$; точно также $A\alpha_1 = A\alpha$ и $\alpha B = B\alpha_2$; следовательно, $\alpha_1\alpha_2 = 2A\alpha + 2\alpha B = 2AB$, и, значит, двугранный угол $\alpha_1 C\alpha_2 = 2\varphi$. Следовательно, повернув систему около оси C на угол 2φ, получим совмещение α_1 с α_2 и α_4 с α. Приведенное соображение одинаково прилагается и для каждого другого радиуса, например α_3, взятого вместо α, а потому при повороте системы около оси C на угол 2φ вообще все радиусы, необходимо образующиеся из данного благодаря присутствию двух данных плоскостей симметрии, должны совпадать с другими радиусами той же системы, и, значит, ось C есть ось симметрии в 2φ.

Следствие а. Отсюда следует, что если через все оси симметрии, взятые попарно, проведем плоскости, то получим при центре симметрии систему гоноэдров, грани которых будут плоскостями, а ребра — осями симметрии. Гоноэдры эти будут именно тригоноэдрами, но не высшего наименования, так как если допустим, что один из гоноэдров, например $ABCD$ (фиг. 68), имеет высшее наименование, например тетрагоноэдр, то, значит, мы пропустили плоскости симметрии AC и BD и не заметили оси симметрии E. Вследствие того, что все грани этих гоноэдров — плоскости симметрии, сама система состоит из равных и симметричных гоноэдров, и притом тех и других в равном числе; притом каждые два смежных гоноэдра должны быть симметричны (а также и противоположные); поэтому при каждом ребре будет схо-



Фиг. 68.

диться четное число поочередно равных и симметричных гоноэдров.

Следствие b. Если внутри одного из этих тригоноэдров, который мы будем называть основным, мы проведем какой-нибудь радиус-вектор, то на основании данных условий симметрии найдем ему соответственные во всех остальных гоноэдрах, которые вообще мы будем называть элементарными, и притом половина этих прямых определится вращением около осей симметрии, и следовательно, их положения выводятся один из другого совмещением, почему и говорят, что их направления обладают равенством совмещения; другая же их половина выводится из первой благодаря присутствию хотя бы одной плоскости симметрии, почему эти вторые направления по отношению к первым называют симметрично равными.[1])

Следствие c. Так как совмещением двух каких-нибудь элементарных гоноэдров мы приводим к совмещению всю систему и, следовательно, все оси, то, значит, осей, не равных осям, составляющим ребра основного тригоноэдра, не существует, т. е. нет системы симметрии с бо́льшим чем 3 числом систем равных осей.

Следствие d. Если нормально ко всем соответственным радиусам-векторам (имеющим как равенство совмещения, так и равенство симметричное) мы проведем плоскости, касательные к шару, центр коего есть центр симметрии, то, как легко видеть, мы получим систему равных или симметричных пирамид, вершины которых совпадут с центром, а трехугольные основания составят грани некоторого типического изоэдра, который мы и будем называть основным для данной системы симметрии.[55] Следовательно, по таким изоэдрам, систематический вывод которых был приведен раньше, мы можем вывести все возможные системы симметрии.

---

[1]) См.: Гадолин, Зап. Мин. общ., ч. IV, стр. 115, 1869.

Следствие е. Может случиться, что симметрия системы осей не совпадает с симметрией фигур, для которых оси эти служат осями симметрии, т. е., что все или некоторые из плоскостей, проходящих через оси симметрии, не будут плоскостями симметрии самой фигуры.[56] В таком случае, все-таки, многогранник, грани которого перпендикулярны к равным направлениям и касательны к шару, имеющему центром центр симметрии, будет типическим изоэдром: типическим по самому построению; изоэдром же — по той причине, что, произведя совмещение равных направлений, мы должны получить и совмещение самих граней; иначе оси, вращением около которых произведено само совмещение, не были бы осями симметрии. В случае же присутствия плоскостей симметрии, в многограннике, кроме равных, будет столько же и симметричных граней; иначе плоскости, принимаемые за плоскости симметрии, не были бы ими, так как какой-нибудь грани не имелось бы по отношению к этой плоскости грани симметричной.

Центральный гоноэдр этих изоэдров мы будем также называть элементарным. Легко видеть, что на только что упомянутые случаи можно смотреть, как на такие, которые выводятся из случаев первого рода, так как, стоит лишь провести плоскости через все оси симметрии попарно и принять их за плоскости симметрии фигуры, а все новые прямые их пересечения, если таковые явятся, за новые оси симметрии, и мы получим случаи первого рода. При этом число равных направлений возрастет в целое число раз, почему и соответственные фигуры будут находиться к первым в отношении мэроэдрии.[57]

§ 37. В основном изоэдре наименование оси симметрии вообще вдвое меньше наименования гоноэдра, через вершину которого проходит эта ось, так как к каждой грани примыкает другая, ей симметричная по отношению к плоскости симметрии, проходящей через их общее ребро. Но в случае, когда две симметричные грани сливаются в одну, т. е. когда

соответствующий радиус-вектор находится в плоскости симметрии, очевидно, что наименование оси равно наименованию соответственного гоноэдра. Равенство этих наименований имеет еще место в случае правильных гоноэдров, т. е. в случае особых типических изоэдров.

Очевидно, что радиус-вектор, по которому мы строим грань типического изоэдра, не должен выходить из пределов элементарного гоноэдра, так как он проходит через точку касания соответственной грани, а эта точка не выходит из пределов самой грани, пока многогранник выпуклый.

На основании предыдущих соображений нетрудно вывести все системы симметрии и их подразделения, исходя из изучения известных уже нам типических изоэдров.

Добавим еще, что симметрия типических изоэдров и подтипических изогонов одна и та же, так как совпадение граней изоэдров влечет за собою совпадение соответственных вершин изогонов и проч.

Переходя теперь к выводу форм, имеющих оси симметрии, мы начнем с правильных многогранников. Ясно, что они в отношении симметрии распадаются на три группы: 1) икосаэдр и додекаэдр, 2) октаэдр и куб, 3) тетраэдр или, вернее, два тетраэдра. В первых двух группах имеется по три системы различных осей симметрии, а в последней — только две. Соответственно тем формам, грани которых нормальны к осям, последние, для первой группы, могут быть названы икосаэдрической, додекаэдрической и триаконтаэдрической, для второй группы — октаэдрической (тригональной), кубической (главной) и додекаэдрической (ромбической, призматической), а для третьей группы — тетраэдрической и кубической.[58] Легко видеть, однако, что тетраэдрическая ось совпадает по своему положению, а также и наименованию, с октаэдрической, а потому особой тетраэдрической оси не существует. Мы начнем вывод со второй группы, так как простейшая, третья, тесно связана с нею и представляет ее упрощение (устранение додекаэдрической оси).

Изучив симметрию всех частных решений типических изоэдров и подтипических изогонов, мы перейдем затем к изучению общих решений.

Глава 9

СИММЕТРИЯ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ТИПИЧЕСКИХ ИЗОЭДРОВ И ПОДТИПИЧЕСКИХ ИЗОГОНОВ

Система кубо-октаэдрическая

(Система правильная,[1]*) кубическая, тессеральная)*

А. Отделение полногранное

(Отделения гомоэдрическое, голоэдрическое[59]*)*

§ 38. Это отделение мы называем полногранным, потому что принимаем за его основной гоноэдр тот тригоноэдр, ребра которого представляют смежные оси симметрии трех систем, а не гоноэдр ему кратный, а потому число граней изоэдров этого отделения получается наибольшее.

Ясно, что основной изоэдр этого отделения есть гексакисоктаэдр, а соответствующий ему центральный гоноэдр есть тригоноэдр с двугранными углами в 45, 60 и 90°. Кубическая ось — четверная, октаэдрическая — тройная, додекаэдрическая — двойная.

Проведем внутри этого гоноэдра произвольный радиус-вектор и найдем все ему соответственные по отношению к данным осям и плоскостям симметрии, и построим типический изоэдр, грани которого перепендикулярны к радиусам-векторам и касательны к шару, центр которого есть центр симметрии. Легко видеть, что вообще получится некоторый

---

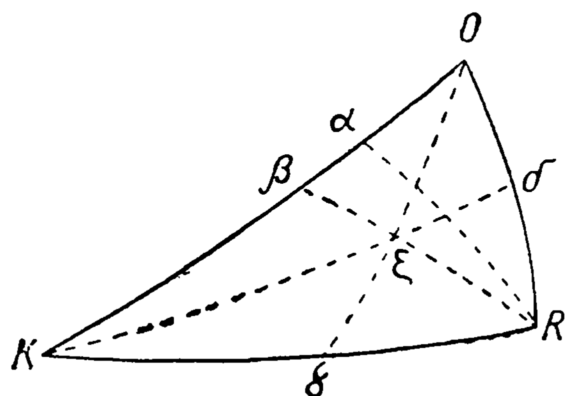
[1]) Этот термин, наиболее распространенный у кристаллографов, нельзя назвать правильным, так как с равным правом он может быть отнесен к системе додекаэдро-икосаэдрической.

гексакис-октаэдр, на гранях которого радиусы-векторы отмечают точки касания и, следовательно, соответственные точки граней фигуры. Число граней фигуры равно числу радиусов и, следовательно, вообще равно числу элементарных тригоноэдров, т. е. 48. Но если мы проведем радиус в плоскости грани тригоноэдра, то ясно, что число граней соответственного изоэдра будет вдвое меньше, т. е. 24. На этот случай можно смотреть, как на случай попарного слияния радиусов, так как, если мы возьмем радиус бесконечно близкий к грани тригоноэдра, то, хотя число радиусов и будет 48, но они представятся в виде 24 пар радиусов, бесконечно близких друг к другу. Двадцатичетырехгранные изоэдры будут трoякого рода, смотря по тому, в какой грани гоноэдра проведен радиус. Если он проведен в грани, противоположной кубической оси, то два тригоноэдра, сливаясь по этой грани, дадут тригоноэдр с двугранными углами в 120, 45 и 45°, т. е. центральный гоноэдр пирамидального октаэдра; последний, значит, и будет искомым изоэдром. Если он проведен в грани, противоположной октаэдрической оси, то два тригоноэдра, сливаясь по этой грани, дадут тригоноэдр с двугранными углами в 90, 60 и 60°, т. е. центральный тригоноэдр пирамидального куба, который поэтому и будет искомым изоэдром. Если же он проведен в грани, противоположной додекаэдрической оси, то два тригоноэдра, сливаясь по этой грани, дадут тетрагоноэдр с углами в 90, 90, 90 и 120°,[60] т. е. центральный гоноэдр триакис-октаэдра, который поэтому и будет искомым изоэдром. Наконец, за радиусы можно принять самые ребра гоноэдра. В таком случае число граней изоэдра получается в зависимости от наименования соответственной оси. При кубической оси сливается 8 радиусов, и потому получается изоэдр с шестью гранями; при октаэдрической оси сливается 6 радиусов, и потому получается изоэдр с восемью гранями, и, наконец, при додекаэдрической оси сливается 4 радиуса, и потому получается изоэдр с двенадцатью гранями. Впрочем, мы уже знаем, что изоэдры,

соответственные этим осям, будут куб, октаэдр и ромбический додекаэдр.

Выводы эти наглядно изображены на фиг. 69, в которой K означает куб (кубическую ось), O — октаэдр (октаэдрическую ось), R — ромбический додекаэдр (додекаэдрическую ось); решения по KR будут соответствовать пирамидальным кубам, по OR — пирамидальным октаэдрам, по KO — триакисоктаэдрам. Наконец, все точки внутри основного тригоноэдра, которые можно означить KOR, соответствуют гексакисоктаэдрам.

Благодаря наглядности и точности изображения соотношений между фигурами изучаемого отделения легко сделать, пользуясь тем же изображением, и многие другие выводы. Мы находим именно, что куб, октаэдр и ромбический додекаэдр[1] — фигуры единичные, что числа пирамидальных октаэдров и [пирамидальных] кубов, а также триакис-октаэдров, — бесконечно большие первого порядка, и потому могут быть сравниваемы друг с другом: отношение между этими числами равно отношению плоских углов, в которых находятся соответственные радиусы; таким образом, наибольшее число триакис-октаэдров, затем пирамидальных кубов и меньше всего пирамидальных октаэдров. Наконец, число гексакис-октаэдров бесконечно большое второго порядка.



Фиг. 69.

Если проведем на поверхности сферического треугольника KOR дугу большого круга, мы получим некоторый ряд гексакис-октаэдров, в котором находится лишь бесконечно большое число первого порядка этих фигур, сравниваемое с числом 24-гранных изоэдров. Из таких рядов особенно замечателен ряд, отмечаемый дугою, проходящею

[1]) Т. е. элементарные изоэдры.

через ребро R и перпендикулярною к дуге KO, т. е. ряд, выражающийся дугою $R\alpha$. Легко видеть, что грани всех этих гексакис-октаэдров пересекаются с плоскостью, проходящею через оси K и O по прямым параллельным, а так как этому же условию удовлетворяет и конечный член ряда — ромбический додекаэдр, то отсюда следует, что соответственные ребра всех этих фигур очерчивают ромбы, тожественные с гранями ромбического додекаэдра; на этом основании самые фигуры можно назвать пирамидальными ромбическими додекаэдрами, так как они могут быть получены насаживанием на грани ромбических додекаэдров четырехгранных пирамид, высоты которых проходят через центры граней фигуры. Ряд этот начинается самим ромбическим додекаэдром и оканчивается особенным триакис-октаэдром, происходящим от слияния пары граней двух смежных пирамид, вследствие чего образуются дельтоиды. Этот особенный триакис-октаэдр единичен (и называется кристаллографами лейцитоэдром). Ясно, что грани этой фигуры параллельны ребрам ромбического додекаэдра и притом образуют равные углы с гранями, пересекающимися по соответственным ребрам; такое соотношение граней носит название „прямое притупление“.

Если проведем через ребро основного тригоноэдра плоскости, делящие соответственные двугранные углы пополам, то получим три новых ряда гексакис-октаэдров, в которых заслуживают внимания лишь конечные члены, соответствующие радиусам β, γ и δ, которые, очевидно, будут „особыми“ триакис-октаэдром, пирамидальным кубом и пирамидальным октаэдром. Радиусу же ε, т. е. прямой пересечения этих трех плоскостей, и, значит, оси конуса, вписанного в основной тригоноэдр, соответствует „особый“ гексакис-октаэдр.

Мы уже упоминали, что все условия симметрии одинаково приложимы и к подтипическим изогонам, для которых поэтому может служить то же наглядное изображение, хотя буквы в нем будут иметь уже другое значение. Для них K означает октаэдр, O — куб, R — кубо-октаэдр, KO — тетрагоно-

эдрический притупленный кубо-октаэдр, KR — притупленный октаэдр, OR — притупленный куб и, наконец, KOR — притупленный кубо-октаэдр.

Серии пирамидальных ромбических додекаэдров соответствует здесь цепь особенных притупленных кубо-октаэдров, характеризующихся тем, что если мы отбросим притупляющие грани, принадлежащие ромбическому додекаэдру, то получим кубо-октаэдр, тогда как вообще этот процесс приводит или к притупленному кубу, или к притупленному октаэдру, а именно, как легко сообразить, всем точкам, находящимся внутри трехугольника $KR\alpha$, соответствуют фигуры, дающие при этом притупленные октаэдры, а всем точкам, находящимся внутри трехугольника $OR\alpha$, соответствуют фигуры, дающие притупленные кубы.

Эти изменения вполне отвечают тем, которые претерпевают соответствующие изоэдры, если, оставляя неизменными ребра, находящиеся в плоскостях осей KO, мы будем вращать около них грани гексакис-октаэдра до попарного их слияния. При этом, если возьмем пирамидальные ромбические додекаэдры, то одновременно сольются 2 пары граней, и мы получим ромбический додекаэдр; если же возьмем какие-нибудь другие гексакис-октаэдры, то получатся пирамидальный куб, или пирамидальный октаэдр, смотря по тому, из какого радиуса выведен самый гексакис-октаэдр, из находящегося ли внутри трехугольника $KR\alpha$, или внутри трехугольника $OR\alpha$.

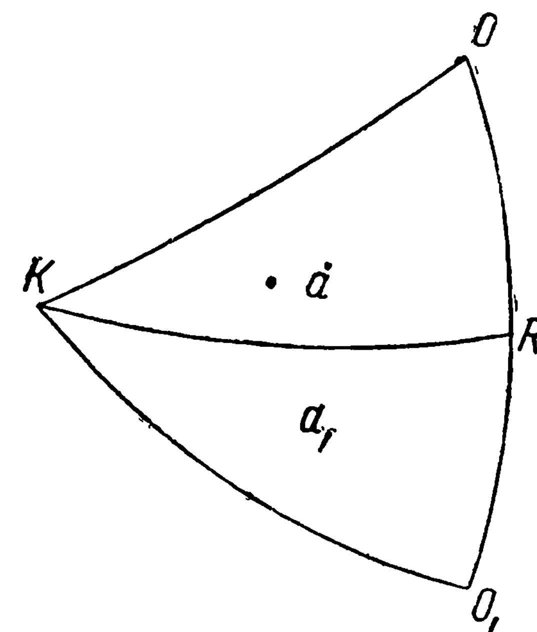
Всем особым изоэдрам, как мы знаем, соответствуют изогоны с гранями — правильными многоугольниками, т. е. особые изогоны.

В. Отделение тетраэдрическое

(Тетраэдрическая гемиэдрия)

§ 39. Соединяя два элементарных тригоноэдра предыдущего отделения по грани, противоположной октаэдрической оси, мы получим некоторый равнобедренный тригоноэдр OKO_1

(фиг. 70) с двугранными углами в 90, 60 и 60°. Этот тригоноэдр вполне аналогичен основному тригоноэдру предыдущего случая, так как его ребра могут быть приняты за оси симметрии в 180, 120 и 120°, а его грани — за плоскости симметрии. К этому случаю, значит, мы можем применить рассуждения, совершенно аналогичные с теми, какие имели место в предыдущем случае. Мы увидим из них, что точкам O соответствуют два тетраэдра, а точке K — куб; точке R, как и прежде, будет соответствовать ромбический додекаэдр; но здесь фигура эта является лишь особенным членом ряда фигур, соответствующих точкам дуги OO_1, т. е. триакис-тетраэдров; прямым KO также должны соответствовать 12-гранные изоэдры, но уже не тетрагональные, а тригональные, и притом грани будут равнобедренными трехугольниками; ясно, что фигуры эти будут не что иное, как пирамидальные тетраэдры, так как их центральный гоноэдр будет иметь двугранные углы, в 120, 60 и 60°. Всем же остальным радиусам, т. е. проведенным внутри элементарного тригоноэдра, должны соответствовать 24-гранные изоэдры, а именно гексакис-тетраэдры. Очевидно, что гексакис-тетраэдры, соответствующие дуге KR, будут те же самые фигуры, что и фигуры, соответствующие той же линии в предыдущем случае, т. е. пирамидальные кубы; таким образом, эти последние фигуры представляют лишь один ряд возможных гексакис-тетраэдров.



Фиг. 70.

Продолжая рассуждать подобно предыдущему, мы легко найдем значение букв и по отношению к изогонам этого отделения, а равно сделаем и другие выводы, аналогичные выводам предыдущего случая.

Сравнивая это отделение с предыдущим, мы находим и некоторое различие. Тогда как в последнем каждой точке

на сфере соответствует единичная фигура, в этом отделении, напротив того, каждой точке, например a, соответствует другая a_1, соответствующая фигуре, симметричной с фигурой, соответствующей первой точке; другими словами, в этом отделении каждая фигура является в двойном числе, и притом каждые две фигуры, составляющие пару, симметричны друг с другом. Обе же фигуры, взятые вместе, дают фигуру, уже относящуюся к первому, полногранному, отделению. Вот почему фигуры этого отделения, в противоположность фигурам предыдущего, называют гемиэдричными, т. е. полугранными. Конечно, название это справедливо лишь относительно изоэдров; изогоны же этого отделения следовало бы назвать гемигоническими; однако, как условный термин, название это вполне удобно.

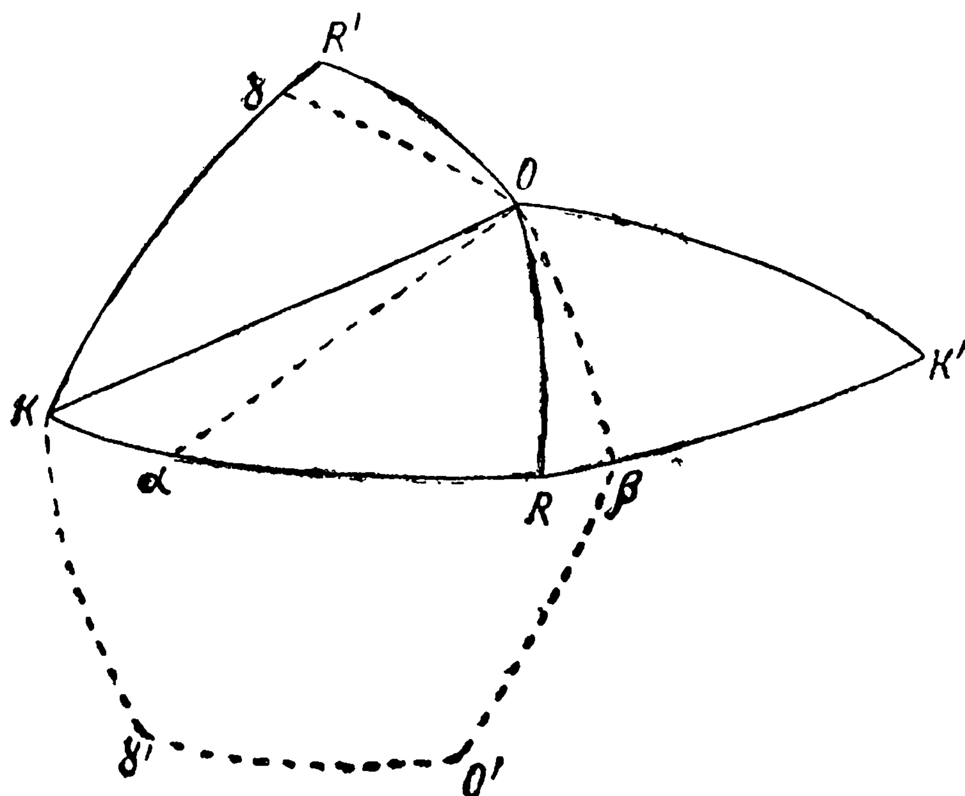
Мы видели также, что не все изоэдры этого отделения имеют число граней вдвое меньшее числа граней фигур предыдущего отделения; имеется целый ряд фигур, тожественных для обоих отделений, а именно ряд пирамидальных кубов KR. Но так как фигуры эти представляют собою лишь частный случай общих решений — гексакис-октаэдра и гексакис-тетраэдра и притом вполне удовлетворяют условиям симметрии обоих отделений, то самые отделения вполне справедливо считать находящимися друг другу в отношении мэроэдрии, а именно гемиэдрии.

С. Отделение додекаэдрическое

(Гемиэдрия додекаэдрическая или параллельногранная)

§ 40. Если мы соединим два элементарных тригоноэдра по грани, проходящей через оси O и K (фиг. 71), то получим тетрагоноэдр RKR^1O, один из двугранных углов которого, а именно тот, который имеет ребро O, измеряется 120°, а потому это ребро не может быть осью симметрии наименования вдвое меньшего, чем наименование гоноэдра типического изоэдра, через вершину которого проходит эта ось.

В этом случае, следовательно, наименование оси O одинаково с наименованием указанного гоноэдра,[1]) а потому самый гоноэдр обязательно должен быть правильным, а значит, и радиусы, определяющие фигуру, должны находиться в плоскости, делящей двугранный угол ROR' пополам. Вращая около этой оси двугранный угол ROR', мы получаем ряд новых тетрагоноэдров $\beta K\gamma O$, равномерных со взятым. В самом деле, прямоугольные сферические трехугольники $RO\beta$



Фиг. 71.

и $R'O\gamma$ равны между собою в силу равенства катетов $OR = OR'$ и углов $RO\beta = R'O\gamma$; притом, так как величина первоначального гоноэдра

$$\frac{90 + 90 + 90 + 120}{2} - 180 = 15^\circ,^{61}$$

то, значит, и вообще все эти тетрагоноэдры представляют делителей $4d$ и потому могут быть приняты за элементарные гоноэдры нового отделения, у которого имеется тройная ось O и двойная K; ребра же R и R', очевидно, уже не могут быть осями.

---

[1]) Это, однако, не относится к осям K, почему проходящие через них плоскости остаются плоскостями симметрии.

Пределы, в которых изменяется элементарный гоноэдр этого отделения, суть гоноэдры $R'ORK$ и KOK'; таковы же пределы и с другой стороны плоскости KO.

Изоэдры, относящиеся к этому отделению, имеют 24 грани, и притом грани тетрагональные. У изогонов этого отделения плоские углы граней: один угол правильного трехугольника, один прямой, а два других изменяются по величине, имея в сумме 180°. Ясно, что изогоны эти — косые тетрагоноэдрические притупленные кубо-октаэдры, у которых притупляющие грани уже не принадлежат ромбическому додекаэдру, а изоэдры — преломленные пентагональные додекаэдры. Решения, соответствующие дугам OK и OR, представляют собою также 24-гранные изоэдры, тожественные с соответствующими изоэдрами полногранного отделения, а именно, триакис-октаэдры и пирамидальные октаэдры. Решения же, соответствующие дуге KR, принадлежат уже 12-гранным изоэдрам. Чтобы определить эти изоэдры, возьмем на этой дуге произвольную точку α и построим для нее элементарный гоноэдр, т. е. соединим ее дугою с точкой O и проведем плоскости $O\beta$ и $O\gamma$ таким образом, чтобы двугранные углы $RO\beta$ и $R'O\gamma$ были равны $KO\alpha$, и, наконец, сложим полученный тетрагоноэдр $\beta O\gamma K$ с примыкающим к нему и ему симметричным $\beta O'\gamma' K$, который также будет соответствовать точке α. Ясно, что получится пентагоноэдр $\beta O\gamma\gamma' O'$ — центральный гоноэдр пентагонального додекаэдра; а потому эти фигуры и будут соответствовать точкам дуги KR.

Единичными решениями этого отделения, соответствующими точкам O, K и R, будут октаэдр, куб и ромбический додекаэдр.

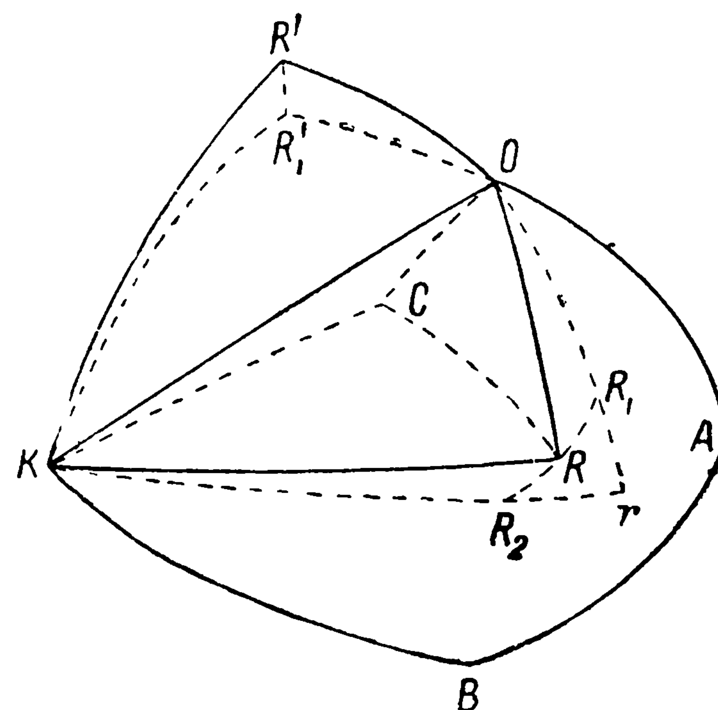
В этом, так же как и в предыдущем, случае каждому радиусу соответствуют две симметричные фигуры, дающие в совокупности фигуру полногранного отделения. Это отделение будет, следовательно, тоже гемиэдрическим. Параллельногранным же оно называется потому, что у всех его изоэдров грани попарно параллельны. Параллельногранность эта легко

докажется сравнением изогонов этого отделения с теми изогонами полногранного отделения, из которых они образованы путем попеременного пропускания вершин по определенному закону. Сравнение это покажет, что при пропускании в этом случае сохраняются противоположные вершины.

D. Отделение гироэдрическое

(Гироэдрическая или плагиэдрическая гемиэдрия)[62]

§ 41. Мы видели в предыдущем случае, что наименование оси O, и только ее одной, равно наименованию соответствующего гоноэдра типического изоэдра. Теперь, исходя из того же элементарного тетрагоноэдра $ORKR'$ (фиг. 72), допустим, что и ось K получает то же наименование, что и соответствующий ей гоноэдр типического изоэдра, т. е. 4; в таком случае радиус, определяющий фигуру этого нового отделения, должен находиться также и в плоскости, делящей двугранный угол ROR' пополам; поэтому, чтобы получить все возможные решения, придется вращать не только двугранный угол ROR' около его ребра, но также и двугранный угол RKR', так что каждой точке на сфере, взятой внутри тетрагоноэдра $KR'OR$, будут соответствовать определенные положения обоих двугранных углов. Указанным способом получится, однако, тетрагоноэдр $OrKR'_1$, который, очевидно, не может быть элементарным, уже хотя бы вследствие неравенства дуг OR'_1 и Or, благодаря которому O уже не будет осью симметрии, как это предположено. Но если отложим $OR_1 = OR'_1$ и затем проведем дугу большого круга R_1RR_2 до пересечения с дугою Kr, то получим пентагоноэдр, кото-



Фиг. 72.

рый, как сейчас докажем, есть действительно элементарный гоноэдр нового отделения. В самом деле, сферические трехугольники $OR'R'_1$ и ORR_1 равны между собою, так как $OR' = OR$ и угол $R'OR'_1 = ROR_1$, а также $OR'_1 = OR_1$ по условию. Отсюда следует, что и угол $OR'R'_1 = ORR_1$; вследствие же равенства этих углов равны и их дополнения до прямого, т. е. $R'_1R'K = R_2RK$, а так как, кроме того, $KR' = KR$ и угол $R'KR'_1 = RKR_2$ по условию, то, следовательно, и сферические трехугольники $R'R'_1K$ и RR_2K равны между собою, а потому и $KR_2 = KR'_1$. Далее, сферический многоугольник $OR_1R_2KR'_1 = ORKR' + OR_1R + KR_2R - OR'R'_1 - KR'R'_1$, или, другими словами, новый пентагоноэдр равномерен первоначальному тетрагоноэдру и, следовательно, измеряется 15°.

Если соединим точку C с R_1, R'_1 и R_2, то получим, что $\triangle\ OCR_1$ симметричен $\triangle\ OCR'_1$ и $\triangle\ KCR'_1$ симметричен $\triangle\ KCR_2$; из этого заключаем о равенстве $CR_1 = CR'_1 = CR_2$; приняв во внимание равенство $RR_1 = RR_2$, найдем, что $\triangle\ CRR_1$ симметричен $\triangle\ CRR_2$ и, значит, $\angle\ CRR_1 = \angle\ CRR_2$, т. е. оба угла прямые. Поэтому на самый элементарный пентагоноэдр можно смотреть, как на гексагоноэдр с двугранным углом R_1RR_2, равным 180°, коего ребро есть ось симметрии в 180°.

Рассуждая подобно предыдущему, мы найдем, что общее решение этого отделения есть тетрагональный пентагонизоэдр или гироэдр; все же остальные решения тожественны с решениями полногранного отделения.

Пределами элементарных гоноэдров этого отделения будут тетрагоноэдр $R'ORK$ и тетрагоноэдр $OABK$. Первый из них соответствует целому ряду триакис-октаэдров, а второй — ромбическому додекаэдру.

Здесь, как и во всех рассмотренных гемиэдрических отделениях, всевозможные фигуры располагаются попарно, и притом две фигуры одной пары симметричны. Но так как это отделение от двух первых отличается отсутствием плоскостей симметрии, то и обе фигуры одной и той же пары будут отличны одна от другой, что и составляет особенность фигур это-

то отделения. Для отличия, одну фигуру пары называют правою, а другую левою: значит, правая фигура несовместима или, как говорят еще, энантиоморфна с левою фигурой той же пары.

Рассматривая выведенные гемиэдрические отделения, мы, кроме полученных уже отличий в условиях симметрии, находим еще следующие общие различия. Общее решение тетраэдрического отделения представляют тригональные изоэдры (так же, как и в полногранном отделении); общее решение додекаэдрического отделения — тетрагональные, а общее решение гироэдрического отделения — пентагональные изоэдры. Элементарный гоноэдр тетраэдрического отделения единичен (так же, как и в полногранном отделении); элементарный гоноэдр додекаэдрического отделения соответствует ряду решений, выраженному на сфере отрезком дуги, а элементарный гоноэдр гироэдрического отделения особенный для каждой фигуры, и, значит, элементарных гоноэдров в додекаэдрическом отделении существует бесконечное множество первого, а в гироэдрическом — бесконечное множество второго порядка.

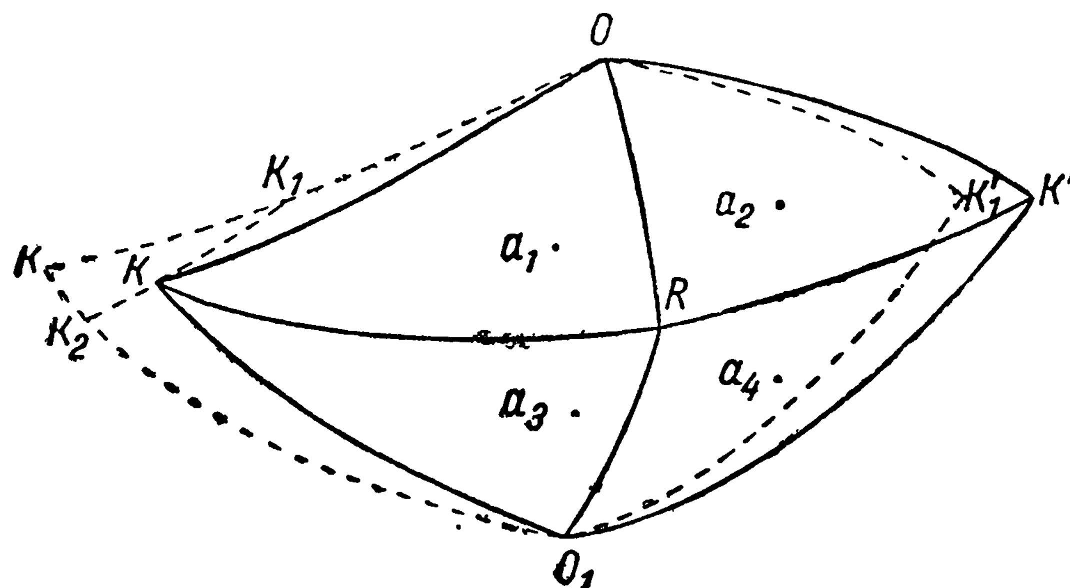
Е. Тетартоэдрическое отделение

(Тетартоэдрия)[63]

§ 42. Если мы совокупим около додекаэдрической оси четыре элементарных гоноэдра полногранного отделения, то получим тетрагоноэдр (фиг. 73) с двугранными углами в 120, 120, 90 и 90°, т. е. центральный гоноэдр ромбического додекаэдра. Легко видеть, что к нему приложимы рассуждения, аналогичные тем, которые послужили для вывода гироэдрического отделения. Совершенно подобным же образом докажем, что, вращая около осей O и O_1 двугранные углы гоноэдра и употребляя указанное выше построение, получим пентагоноэдры $K_2O_1K_1'OK_1$, которые можно принять за элементарные для нового отделения, и притом, так же как в гидроэдрическом отделении, каждое положение двугранных углов

или, иначе, каждый элементарный пентагоноэдр соответствует лишь одному пентагональному изоэдру. И здесь на K, так же как на R в предыдущем отделении, можно смотреть, как на шестое ребро, представляющее ось симметрии в 180°.

В этом отделении, так же как и в гироэдрическом, плоскости симметрии вовсе отсутствуют, и оси симметрии те же и того же наименования, что в отделениях тетраэдрическом и додекаэдрическом. Общее решение этого отделения — 12-гранный изоэдр, а именно тетартоэдр или косой тригональный



Фиг. 73.

пентагон-изоэдр. Решения по дугам KO, OR и KR будут также 12-гранные изоэдры, а именно пирамидальный тетраэдр, дельтоид-додекаэдр и пентагональный додекаэдр; последняя фигура есть лишь одна из особенных форм тетартоэдра. Оси O, как радиусу, соответствует тетраэдр, оси K — куб; радиусу R попрежнему соответствует ромбический додекаэдр. В самом деле, в первой оси, как тройной, сливаются три радиуса; во второй, как двойной, сливаются два радиуса; R же уже не будет осью.

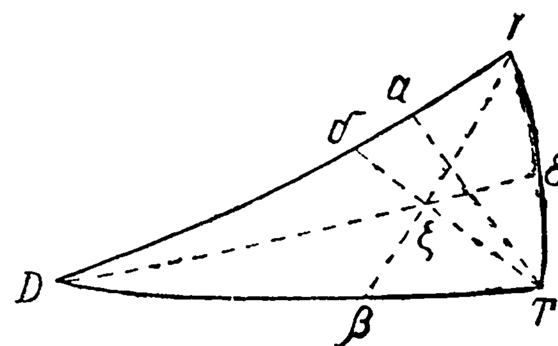
В этом отделении каждому радиусу соответствуют 4 симметрично расположенных радиуса, или, что все равно, фигуры соединены в группы по 4 в каждой; например, радиусу a_1, находящемуся в пределах трехугольника ORK, будут соответствовать два симметричных радиуса: a_2 — в пределах трехугольника ORK' и a_3 — в пределах трехугольника O_1RK;

точно также радиусу a_2 будут симметричны a_1 и a_4 и т. д. Совокупность же всех четырех фигур одной группы дает форму полногранного отделения. В силу отсутствия плоскостей симметрии каждые две симметричные фигуры группы будут различны, т. е. несовместимы, или энантиоморфны; поэтому каждая группа состоит из двух пар различных фигур — правых и левых.

Система додекаэдро-икосаэдрическая

А. Отделение полногранное

§ 43. Основной тригоноэдр этого отделения (фиг. 74) имеет двугранные углы в 90, 60 и 36° [64] и, значит, измеряется в $\frac{90+60+36}{2}-90=3°$, [65] и есть, очевидно, не что иное, как центральный гоноэдр гексакис-икосаэдра. Фигуры, соответствующие дугам DT, TI и DI, должны быть 60-гранные изоэдры, а именно, как легко видеть, пирамидальные додекаэдр, икосаэдр и триакис-икосаэдр. Ребрам же D, I и T, как осям, соответствуют элементарные изоэдры — додекаэдр, икосаэдр и триаконтаэдр. Дуге $T\alpha$, нормальной к дуге DI, соответствуют пирамидальные триаконтаэдры. Точкам β, γ и δ пересечения дуг, делящих пополам углы основного сферического трехугольника, с противоположными сторонами соответствуют особые изоэдры. Наконец, точке ε пересечения всех этих дуг и отвечающей оси конуса, вписанного в элементарный тригоноэдр, соответствует особый гексакис-икосаэдр.



Фиг. 74.

Вообще, все выводы, относящиеся к фигурам этого отделения, настолько аналогичны выводам, сделанным для полногранного отделения кубо-октаэдрической системы, что нет надобности здесь как бы повторять их вновь. Существенное

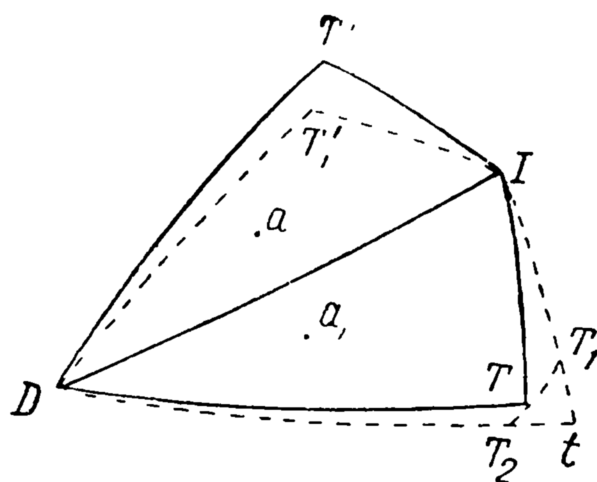
различие этого отделения состоит лишь в том, что ось D имеет наименование 5, а не 4.

Переходя к выводу гемиэдрических отделений по уже известному нам способу, мы легко убедимся, что в этой системе отделений, аналогичных тетраэдрическому и додекаэдрическому, не существует, а остается лишь одно гемиэдрическое отделение, аналогичное гироэдрическому в кубооктаэдрической системе.

В. Отделение пентагоноэдрическое

(Гемиэдрия додекаэдро-икосаэдрической системы)

Элементарный изоэдр этого отделения (фиг. 75) есть пентагоноэдр $IT_1T_2DT_1'$, построенный из двух элементарных гоноэдров предыдущего отделения вращением двугранных углов $T'IT$ и $T'DT$ около их ребер, отложением $IT_1 = IT_1'$ и проведением дуги T_1TT_2 через ребро T до пересечения с дугою Dt. Каждому построенному таким образом пентагоноэдру соответствует некоторый пентагональный пентагон-изоэдр, как фигура гемиэдричная относительно гексакис-икосаэдра, а каждому радиусу a соответствует симметричный радиус a_1, и, значит, все фигуры этого отделения соединяются в пары симметричных. В силу же отсутствия плоскостей симметрии две фигуры каждой пары энантиоморфны, и могут быть различены как правая и левая.

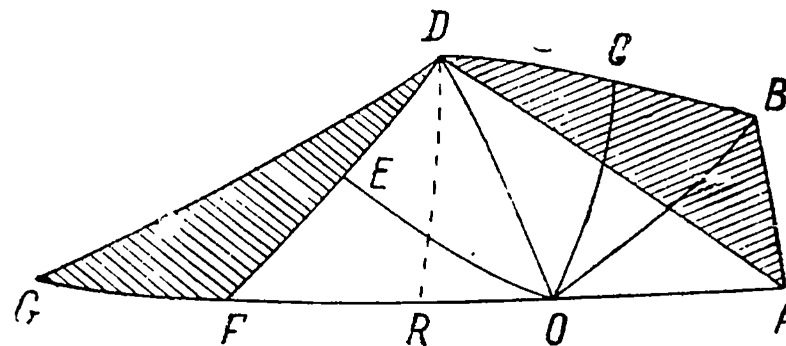


Фиг. 75.

§ 44. Рассмотрев, таким образом, все фигуры, имеющие симметрию правильных многогранников или находящиеся с ними в связи по мэроэдрии, и соединив на этом основании известные уже нам фигуры в системы и отделения, мы видим, что в эту классификацию вошли все возможные частные

решения, полученные нами в предыдущем отделе иным путем. Другими словами, все частные решения изогонов и типических изоэдров находятся в тесной связи с правильными многогранниками и резко распределяются в две системы.

Теперь изучим связь, существующую между этими двумя системами. Сложим около точки O пять элементарных тригоноэдров додекаэдро-икосаэдрической системы, как показано на фиг. 76; мы получаем тетрагоноэдр $ABDF$, представляющий половину центрального гоноэдра правильного додекаэдра. Двугранный угол при вершине B составляет дополнение до $2d$ двугранному углу при F, а сторона BD равна DF. Поэтому, проведя дугу DA, мы отделим некоторый сферический трехугольник, который можем приложить к дуге DF таким образом, чтобы сторона BA пошла по дуге FG и составила бы продолжение дуги AF. Сделав это, получаем трехугольник ADG, равномерный с первоначальным четырехугольником, но имеющий иные двугранные углы, а именно, так как один из них 120°, а сумма двух других должна быть 90° (что выводится из его величины), то вследствие равенства последних между собою каждый из них равен 45°. Но это есть не что иное, как центральный сферический трехугольник пирамидального октаэдра. Ребра соответствующего гоноэдра вполне определяют собою положение осей кубо-октаэдрической системы, а именно A и G принадлежат кубическим осям, а D — оси октаэдрической; ось же додекаэдрическая будет середина дуги AG, т. е. точка R.

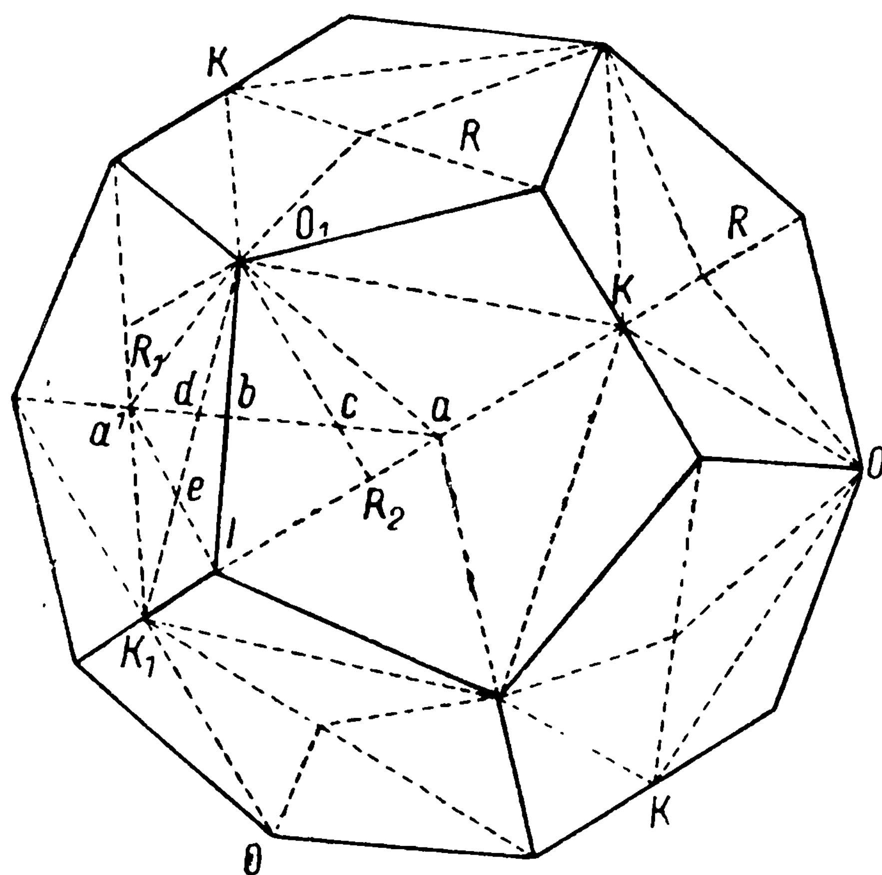


Фиг. 76.

Отсюда мы можем сделать ряд заключений. Мы видели, например, что ось октаэдрическая совпадает с икосаэдрическою, ось кубическая — с триаконтаэдрическою; отсюда заключаем, что некоторые 8 плоскостей икосаэдра могут произ-

вести октаэдр (а следовательно, некоторые 4 — тетраэдр [1]), а некоторые 6 плоскостей триаконтаэдра могут произвести куб.

Мы остановимся на выводе более общих отношений между обеими системами. Понятно, что если мы сумеем элементарные гоноэдры одной системы одинаковым образом разделить на такие части, чтобы, складывая соответственные части нескольких смежных гоноэдров, получить из них совокупность элементарных гоноэдров другой системы, фигуры, принадлежащие этим обеим системам и соответствующие взятым гоноэдрам, будут находиться друг к другу в отношении мэроэдрии. Как сейчас увидим, это действительно имеет место для некоторых отделений.



Фиг. 77.

Ради простоты мы будем ребра и грани гоноэдров проектировать не на сферическую поверхность, а на поверхность правильного додекаэдра. На фиг. 77 оси означены теми же буквами, что и в предыдущем изложении. Если мы примем тетрагоноэдр $R_1K_1R_2O_1$ за элементарный и подвергнем его тому ряду изменений, какому он же подвергается в додекаэдрическом отделении, то вообще получим некоторый тетрагоноэдр $a'K_1aO_1$, который будет удовлетворять только что указанным условиям, а именно все элементарные гоноэдры правильного додекаэдра одинаково разделяются на 4 части, и каждая из трех пар смежных таких частей около одной

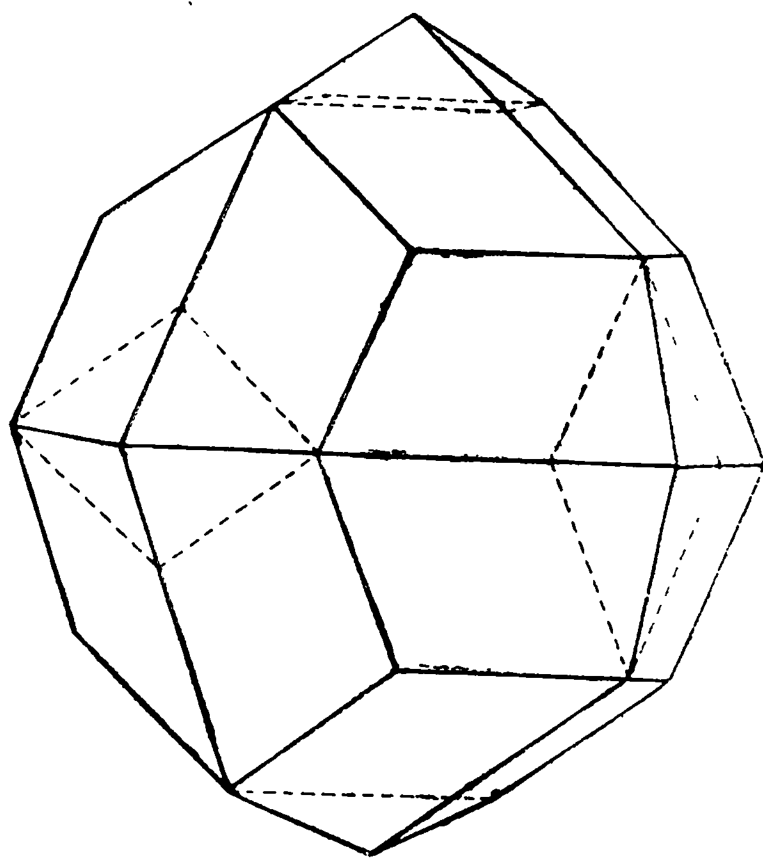
[1]) Это соотношение изображено на фиг. 61.

вершины додекаэдра составит тетрагоноэдры, равные $a'K_1aO_1$, т. е. элементарные тетрагоноэдры додекаэдрического отделения. Отсюда заключаем, что *все вообще фигуры додекаэдрического отделения кубо-октаэдрической системы находятся в отношении мэроэдрии к фигурам додекаэдро-икосаэдрической системы.*

Теперь исследуем ближе это отношение. Ясно, что каждому радиусу-вектору будут соответствовать два изоэдра, смотря по тому, какой гоноэдр мы примем за элементарный. В общем случае каждому радиусу соответствуют некоторый гексакис-икосаэдр и некоторый преломленный пентагональный додекаэдр. Отношение этих отделений будет, следовательно, отношение пемптоэдрии. Но, однако, не все гексакис-икосаэдры способны давать преломленные пентагональные додекаэдры. Очевидно, что гексакис-икосаэдры, соответствующие прямой O_1R_2, дадут пирамидальные октаэдры; из этих фигур одна, соответствующая точке c пересечения прямой O_1R_2 и ab — апофеме грани правильного додекаэдра,[1]) представляет собою не гексакис-икосаэдр, а некоторый пирамидальный додекаэдр. Далее, гексакис-икосаэдры, соответствующие прямой O_1K_1, дадут триакис-октаэдры; из фигур этого ряда та, которая соответствует точке d пересечения прямой O_1K_1 с апофемой $a'b$, будет не гексакис-икосаэдр, а некоторый пирамидальный додекаэдр, а та, которая соответствует точке пересечения e прямых O_1K_1 и $a'I$, будет некоторый триакис-икосаэдр. Далее, пирамидальные икосаэдры, соответствующие прямой O_1I, дадут вообще преломленные пентагональные додекаэдры; но пирамидальные икосаэдры, соответствующие прямой IK_1, дадут пентагональные додекаэдры. Точно также и триакис-икосаэдры, соответствующие прямой O_1a, дадут преломленные пентагональные додекаэдры, а прямой Ia — пентагональные додекаэдры; из последних, однако,

[1]) В следующем изложении точки a и a' принимаются за центры граней правильного додекаэдра.

тот, который соответствует точке R_2, будет уже не пентагональный, а ромбический додекаэдр.[1]) Пирамидальные додекаэдры, соответствующие прямым ab и ba', дают вообще также преломленные пентагональные додекаэдры, и лишь те два из них, которые соответствуют точкам c и d, дадут, как мы уже упоминали, пирамидальный октаэдр и триакис-октаэдр. Наконец, точке O_1 соответствуют икосаэдр и октаэдр, точке K_1 — триаконтаэдр и куб. Правильный додекаэдр, соответствующий точке a', мэроэдричен по отношению к некоторому пентагональному додекаэдру из ряда K_1R_1; мэроэдрия эта уже представляет тожество, а триаконтаэдр, соответствующий точке b, мэроэдричен по отношению к некоторому преломленному пентагональному додекаэдру. Икосаэдр, соответствующий точке I, мэроэдричен по отношению к некоторому пентагональному додекаэдру. Отсюда мы заключаем между прочим, что триаконтаэдр представляет собою комбинацию некоторого преломленного пентагонального додекаэдра, соответствующего точке b, с кубом, соответствующим точке K_1, как это изображено на фиг. 78, а икосаэдр представляет комбинацию некоторого пентагонального додекаэдра, соответствующего точке I, с октаэдром, соответствующим точке O_1, как это изображено на фиг. 79.

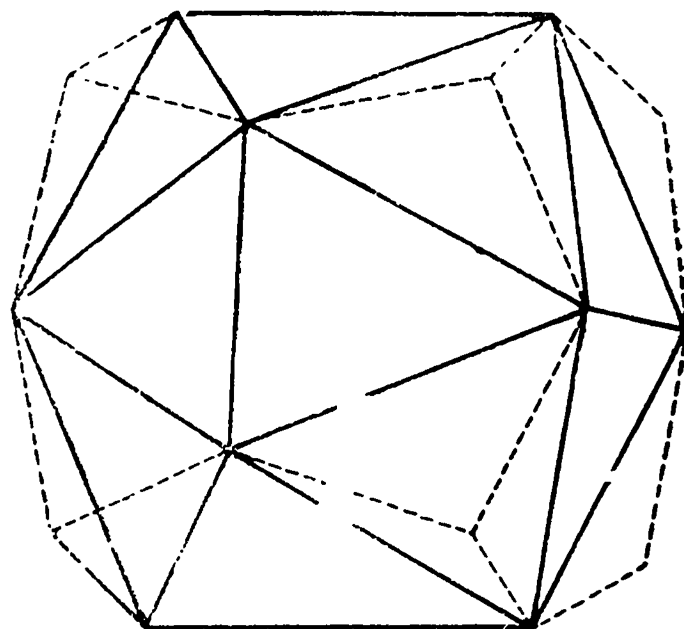


Фиг. 78.

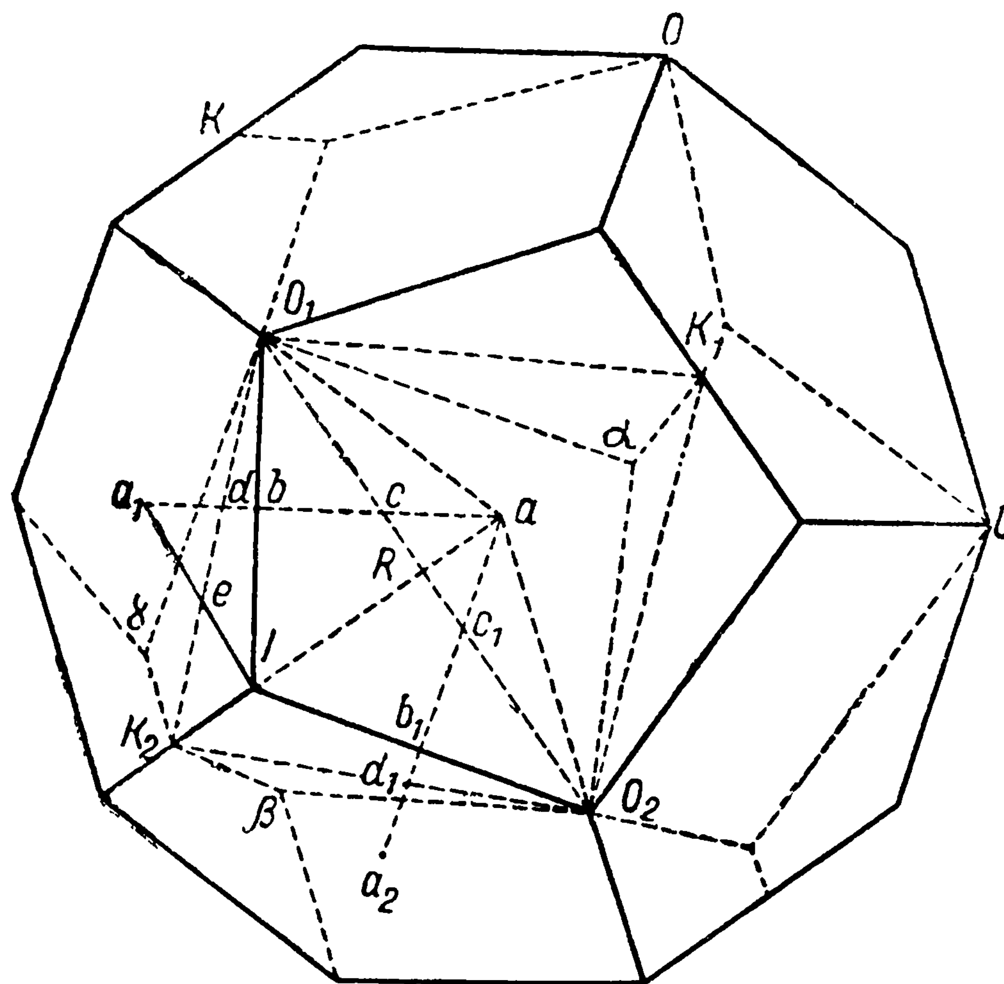
Таким образом, отношения, существующие между фигурами обеих систем, довольно сложны, хотя, по общему случаю, представляют пемптоэдрию.

[1]) Эти отношения изображены на фиг. 62, 63 и 64.

Если мы построим тетрагоноэдр $O_1K_1O_2K_2$ (фиг. 80) и подвергнем его тем изменениям, каким он подвергается в тетартоэдрическом отделении, то получим какой-нибудь пентагоноэдр $O_1\alpha O_2\beta K_2\gamma$, который также удовлетворяет условиям, о которых говорено выше, и потому может быть принят за элементарный гоноэдр фигур, мэроэдричных по отношению к фигурам додекаэдро-икосаэдрической системы, и, значит, *все вообще фигуры тетартоэдрического отделения находятся в отношении мэроэдрии к фигурам додекаэдро-икосаэдрической системы.*



Фиг. 79.



Фиг. 80.

Исследуем ближе это отношение. Вообще, каждому радиусу соответствуют некоторый тетартоэдр и некоторый гексакис-

икосаэдр. Отношение между этими двумя отделениями есть, следовательно, декатоэдрия. Из гексакис-икосаэдров те, которые соответствуют прямой O_1R, дают не тетартоэдры, а триакис-тетраэдры; точка *c* пересечения прямой O_1R с апофемой *ab* соответствует, впрочем, не гексакис-икосаэдру, а пирамидальному додекаэдру. Точно также гексакис-икосаэдры, соответствующие прямой O_1K_2, дают не тетартоэдры, а пирамидальные тетраэдры; из них те, которые соответствуют точке *d* пересечения прямой O_1K_2 с апофемой и точке *e*[66] — той же прямой с прямою a_1I, не гексакис-икосаэдры, а пирамидальный додекаэдр и триакис-икосаэдр. Пирамидальные икосаэдры, соответствующие прямой O_1I, дают тетартоэдры; точке *b* соответствует, однако же, триаконтаэдр; пирамидальные икосаэдры, соответствующие прямой K_2I, дают пентагональные додекаэдры. Триакис-икосаэдры, соответствующие прямым O_1a и Ia_1, дают тетартоэдры, кроме того, который соответствует точке *e* и дает пирамидальный тетраэдр; триакис-икосаэдры же, соответствующие прямой *Ia*, дают пентагональные додекаэдры, в том числе и ромбический додекаэдр, соответствующий точке *R*. Пирамидальные додекаэдры, соответствующие прямым *ab*, ab_1, a_1b и a_2b_1, дают тетартоэдры кроме тех, которые соответствуют точкам *c*, *d*, c_1 и d_1. Икосаэдр, соответствующий точке *I*, дает пентагональный додекаэдр, а [соответствующий] точкам O_1 и O_2 дает тетраэдры. Правильный додекаэдр, очевидно, общая фигура для обоих отделений. Триаконтаэдр, соответствующий точкам *K*, дает куб; поэтому на него можно смотреть, как на комбинацию двух тетартоэдров и куба, что и понятно, так как преломленный пентагональный додекаэдр действительно представляет комбинацию некоторых двух симметричных тетартоэдров; икосаэдр же представляет комбинацию некоторого пентагонального додекаэдра с двумя тетраэдрами, что также естественно.

По отношению же к гемиэдрическим фигурам додекаэдро-икосаэдрической системы, фигуры тетартоэдрические имеют

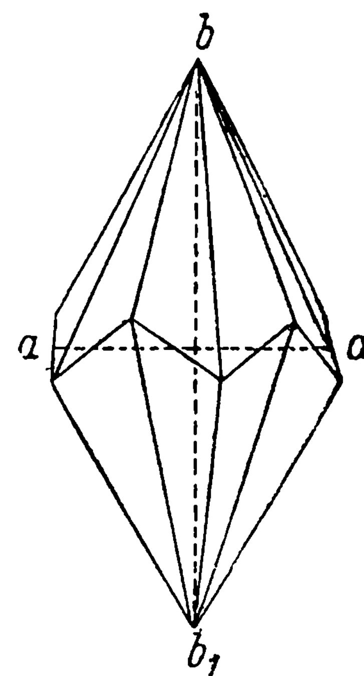
отношение пемптоэдрии, в чем можно убедиться, если принять во внимание, что октаэдрические оси последних совпадают с некоторыми (икосаэдрическими) осями первых, и если мы сложим пять элементарных пентагоноэдров гемиэдрического отделения додекаэдро-икосаэдрической системы около додекаэдрической оси, то полученный полигоноэдр будет равномерен центральному гоноэдру тетартоэдра.

§ 45. Шар, рассматриваемый как правильный многогранник, тоже определяет собою особую систему симметрии. Основной гоноэдр будет иметь величину ноль. Поэтому все диаметральные плоскости будут плоскостями симметрии, все радиусы — осями симметрии. Дальнейших подразделений эта высочайшая степень симметрии не имеет.

Глава 10

СИММЕТРИЯ ОБЩИХ РЕШЕНИЙ ТИПИЧЕСКИХ ИЗОЭДРОВ И ПОДТИПИЧЕСКИХ ИЗОГОНОВ

§ 46. Возьмем какую-нибудь фигуру, относящуюся к общим решениям типических изоэдров, например пентагональный скаленоэдр (фиг. 81), и исследуем условия его симметрии. У него имеется одна пятерная ось bb_1, которая по своему положению называется главною; она изображается обыкновенно в вертикальном положении; кроме нее, имеется еще 5 двойных осей, соответствующих точкам a, соединяющим средины противоположных средних ребер и находящимся в плоскости, перпендикулярной к главной оси и проходящей через центр фигуры, называющейся главною плоскостью. Последняя плоскость, несмотря на то, что в ней заключаются оси симметрии, не есть, однако, плоскость симметрии. Это показывает, что самая фигура не может считаться основным изоэдром системы. Проведя отно-



Фиг. 81.

сительно главной плоскости грани, симметричные всем граням этой фигуры, получаем новую — дидекагональную бипирамиду, которая удовлетворяет всем условиям основного изоэдра. У ней, кроме главной оси, наименования 10, имеется десять боковых осей наименования 2; кроме главной плоскости симметрии, имеется еще 10 побочных плоскостей симметрии, проходящих через главную ось. Эта фигура, как основная, может служить исходным пунктом для построения следующей системы.

Система декагональная

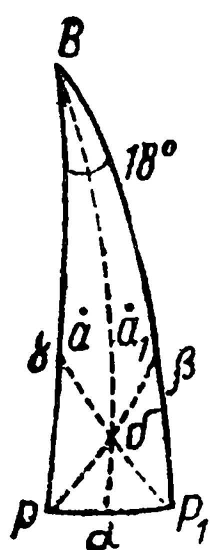
А. Отделение полногранное

Элементарный тригоноэдр BPP_1 (фиг. 82) с двугранными углами в 90, 90 и 18°; его ребра — оси симметрии, а грани — плоскости симметрии. Каждому радиусу-вектору соответствует 40-гранный изоэдр, а именно вообще дидекагональные бипирамиды; из них те, которые соответствуют дуге $B\alpha$, делящей угол PBP_1 пополам, будут иметь своими основаниями правильные 20-угольники и потому будут икосигональными бипирамидами; наконец, та из них, которая соответствует точке δ пересечения дуг $B\alpha$ с дугами $P\beta$ и $P_1\gamma$, делящими пополам соответственные углы, есть особая икосигональная бипирамида. Фигуры, соответствующие дугам обвода BP, BP_1 и PP_1, будут иметь число граней вдвое меньшее, а именно первым двум соответствуют декагональные бипирамиды, а последней — дидекагональная призма. Призма, соответствующая точке α, будет икосигональная. Точкам β и γ соответствуют особые декагональные бипирамиды. Точкам P и P_1 соответствуют декагональные призмы. Точке B соответствует лишь пара параллельных плоскостей, носящая название базопинакоида.

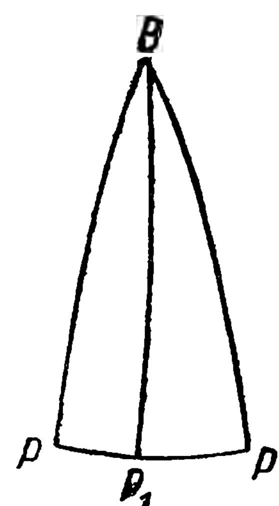
Таким образом, для систем изоэдров, принадлежащих общим решениям, является характерным присутствие откры-

тых фигур. Изоэдрам этим, как мы знаем, соответствуют изогоны — плоские многоугольники и даже отрезки прямой.

Дуга $B\alpha$, делящая угол PBP_1 пополам, разделяет элементарный сферический трехугольник на две равные и симметричные части, вследствие чего каждому радиусу a в том же гоноэдре имеется симметричный ему радиус a_1. Поэтому все возможные фигуры разделяются на 2 группы симметричных фигур; одна группа соответствует трехугольнику $BP\alpha$, а другая $BP_1\alpha$. Чтобы отличить эти две группы, условно отли-



Фиг. 82.



Фиг. 83.

чают оси P и P_1 и называют одну из них, например P_1 побочною, а другую P — промежуточною, хотя оси эти и не представляют никакого различия в геометрическом характере. Вместе с тем и все фигуры, соответствующие дугам BP и BP_1, отличаются особыми названиями; фигурам BP присваивается название фигур первого, а фигурам BP_1 — фигур второго рода.

Подобно тому, как и в системах правильных многогранников, и здесь мы выведем все гемиэдрические отделения, если сумеем так сложить пару элементарных гоноэдров или видоизменить ее по какому-нибудь закону, чтобы новый гоноэдр удовлетворял условиям элементарного. Поступая таким образом, мы выведем следующие случаи.

Если сложим два элементарных гоноэдра по ребру BP_1 (фиг. 83), то получим тригоноэдр PBP', удовлетворяющий не

только условиям элементарного гоноэдра какого-нибудь отделения, но и основного гоноэдра новой системы, а именно системы, имеющей вдвое меньшее наименование (например пентагональной). Поэтому мы приходим к полногранному отделению новой системы, и нет надобности поэтому входить в более детальное рассмотрение этого случая. Условно, однако, мы можем считать такое отделение гемиэдричным и называть эту гемиэдрию диагональною.

B. Отделение скаленоэдрическое
(Скаленоэдрическая гемиэдрия)

§ 47. Вращая около P_1 (фиг. 84), как около оси, дугу PP', мы из тригоноэдра PBP' получим pBp', равномерный с первым и удовлетворяющий условиям элементарного, если отбросить оси P и P' и оставить лишь P_1 и B; вместе с тем исчезнут главная плоскость симметрии и плоскость симметрии BP_1. Так как ось P_1 двойная, то возможные решения должны соответствовать радиусам, находящимся на дуге $P_1\alpha$, нормальной к pp'; этим определяется элементарный гоноэдр для фигуры, соответствующей каждой данной точке.

Фиг. 84.

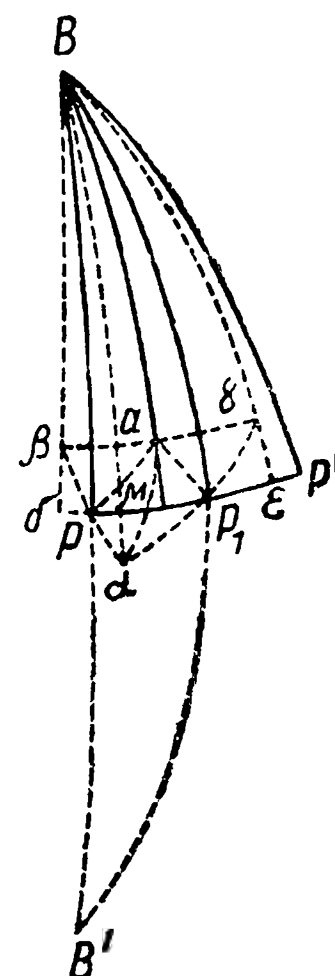
Общим решением этого отделения будет пентагональный скаленоэдр. Предельными элементарными гоноэдрами этого отделения будут PBP' и дигоноэдр $BP'B'P_1$; каждому элементарному гоноэдру, например pBp', соответствует ряд фигур, отвечающих дуге $P_1\alpha$, нормальной к pp^1. Дугам BP и BP' соответствуют пентагональные дельтоэдры, а остальные фигуры тожественны с соответственными фигурами полногранного отделения.

Фигуры этого отделения, как, впрочем, и фигуры всех отделений, представляющих общие решения изоэдров, соединяются в симметричные пары.

С. Отделение трапецоэдрическое

(Трапецоэдрическая гемиэдрия)

§ 48. В предыдущем случае мы принимали ось B за ось наименования 5, т. е. вдвое меньшего, чем наименование гоноэдра типического изоэдра, через вершину которого проходит эта ось. Теперь (фиг. 85) примем ее за ось наименования 10. В таком случае возможные решения будут находиться на дуге, делящей угол B пополам. Поэтому, если при новых условиях симметрии мы пожелаем получить фигуру, соответствующую некоторому произвольному радиусу-вектору a, то должны угол B повернуть около его ребра до тех пор, пока его равноделящая не пройдет через точку a. Пусть новое положение угла PBP' будет $\delta B\varepsilon$. Дугу PP_1P' мы тоже можем принять за угол в 180°, имеющий вершину в точке P_1. Если P_1 есть ось наименования 2, т. е. того же, что и наименование гоноэдра типического изоэдра, через вершину которого проходит эта ось, то для того, чтобы получить фигуру, соответствующую радиусу-вектору a, нужно также и угол PP_1P' повернуть около его ребра P_1 до тех пор, пока равноделящая, т. е. дуга P_1a, перпендикулярная к PP', не пройдет через точку a. Теперь, отложив $B\beta = B\gamma$, соединив β с P и продолжив βP до пересечения с γP_1 в точке α, мы получим тетрагоноэдр $B\gamma\alpha\beta$, удовлетворяющий, как мы сейчас докажем, всем условиям элементарного, а именно, он будет гоноэдром, равномерным с PBP' и притом $P\beta = P\alpha$, $P_1\alpha = P_1\gamma$ и $Pa \perp \alpha\beta$.



Фиг. 85.

Если бы указанные отношения были справедливы, то построение того же гоноэдра мы могли бы произвести таким образом: соединить a с P и P_1, провести $\alpha\beta \perp aP$ и $\alpha\gamma \perp aP_1$, отложить $P\beta = P\alpha$ и $P_1\gamma = P_1\alpha$, и, наконец, соединить β и γ

с B. При таком построении пришлось бы доказать, что $B\beta = B\gamma$, что угол $\beta Ba = \gamma Ba = PBP_1$.

Соединим точку a с α, β и γ, а также α с B. На основании условий построения заключаем о равенстве прямоугольных трехугольников $P\beta\delta$ с $P\alpha\mu$ и $P_1\gamma\varepsilon$ с $P_1\alpha\mu$. Равенство же [между собой] этих трехугольников влечет за собою равенства $\mu\alpha$ с $\beta\delta$ и $\gamma\varepsilon$, откуда заключаем о равенстве последних между собою, т. е. $\beta\delta = \gamma\varepsilon$, а в силу равенства $B\delta = B\varepsilon$ получаем $B\beta = B\gamma$. Но по причине равенства трехугольников $P\beta\delta$ с $P\alpha\mu$ и $P_1\gamma\varepsilon$ с $P_1\alpha\mu$ имеем также $P\delta = P\mu$ и $P_1\varepsilon = P_1\mu$, а это влечет за собою равенство углов δBP с αBP и γBP_1 с αBP_1, почему и $\delta BP + \gamma BP_1 = \alpha BP + \alpha BP_1 = PBP_1$. Но в силу равенства всех сторон трехугольники βBa и γBa симметричны, откуда заключаем, что угол $\beta Ba = \gamma Ba$, а так как их сумма вдвое больше PBP_1, то каждый из них равен PBP_1.

Симметричность и, следовательно, равномерность упомянутых раньше трехугольников $P\beta\delta$ с $P\alpha\mu$ и $P_1\gamma\varepsilon$ с $P_1\alpha\mu$ влечет за собой равномерность построенного гоноэдра с гоноэдром $\delta B\varepsilon$, но так как угол $\delta BP = \varepsilon BP'$, что видно из того, что $\delta BP = \alpha BP$, $\alpha BP + \alpha BP_1 = PBP_1$, $PBP_1 = P_1BP'$ и, наконец, $\alpha BP_1 = \varepsilon BP_1$, то, значит, и гоноэдр PBP' равномерен с $\delta B\varepsilon$, а следовательно, и с построенным.

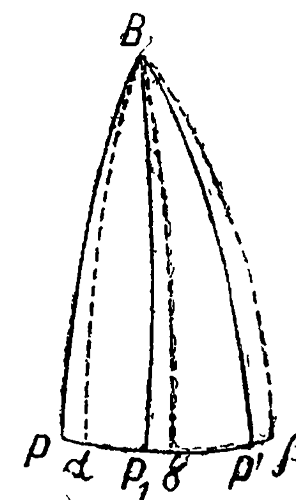
Таким образом, действительно, каждому радиусу a соответствует особый гоноэдр $B\gamma\alpha\beta$, который может быть принят за элементарный, а так как гоноэдр этот есть центральный гоноэдр декагонального трапецоэдра, то, значит, эта последняя фигура и будет общей для данного отделения. Предельными гоноэдрами будут PBP' для решений по линии BP_1 и такой же для решений по линии BP; решениям по линии PP_1 соответствует дигоноэдр BB_1PP_1. Легко видеть, что в первых двух случаях мы получаем декагональные бипирамиды первого и второго рода, а в последнем — икосигональные призмы; точкам же P_1 и P соответствуют декагональные призмы первого и второго рода; точке B, как всегда, — базопинакоид.

По построению элементарного гоноэдра этого отделения заключаем, что оси симметрии те же и того же наименования, что и в полногранном отделении; плоскости же симметрии отсутствуют.

D. Отделение бипирамидальное

(Бипирамидальная гемиэдрия)

§ 49. Мы можем представить себе, что ось B получает наименование 10, но угол PP_1P' не поворачивается. В таком случае, чтобы получить решение, соответствующее точке a, нужно угол PBP' (фиг. 86) повернуть около ребра настолько, чтобы равноделящая его проходила через точку a. Ясно, что в этом случае вообще все фигуры будут декагональные бипирамиды (кроме, конечно, решений по PP_1 — декагональных призм), т. е. те самые фигуры, которые в полногранном отделении соответствуют линиям BP и BP_1. Однако, так как положение этих фигур изменяется, то для отличия фигуры этого отделения называются бипирамидами и призмами третьего рода. Решения же по BP_1 и BP попрежнему будут фигуры первого и второго рода.



Фиг. 86.

В этом отделении вовсе нет побочных осей и плоскостей симметрии, а остаются только главная ось и главная плоскость симметрии.

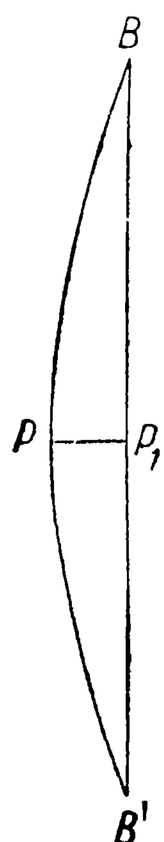
E. Отделение гемиморфное

(Гемиморфия)

§ 50. Если мы сложим гоноэдры BP_1P и PP_1B' (фиг. 87), то получим элементарный дигоноэдр нового отделения, фигуры которого будут: общее решение — дидекагональные

пирамиды[1]) (открытые), решения по линиям BP_1 и BP — декагональные пирамиды первого и второго рода; точке B будет соответствовать уже не пара, а всего одна плоскость; наконец, решения по линии PP_1 те же, что и в полногранном отделении.

В этом отделении одна ось BB' (главная) наименования 10 и 10 же проходящих через нее побочных плоскостей симметрии. Отделение это вполне удовлетворяет условиям полногранного, так как ребро элементарного дигоноэдра есть ось, а его грани — плоскости симметрии. Поэтому на это отделение правильнее смотреть, как на другое полногранное отделение той же системы.



Фиг. 87.

§ 51. Выведенными четырьмя отделениями исчерпываются все возможные гемиэдрии, так как, делая их, мы исчерпываем все возможные предположения, какие мы можем сделать относительно осей и плоскостей симметрии. Для того же, чтобы вывести вообще все возможные отделения, остается еще скомбинировать законы образования этих отделений по 2, по 3 и т. д., насколько это возможно для получения элементарных гоноэдров новых отделений. Для краткости мы будем называть выведенные законы образования соответственно названию самих гемиэдрий: скаленоэдрическим, трапецоэдрическим, бипирамидальным и гемиморфическим. Легко видеть, что первые два закона не приложимы ни к одному из гемиэдрических отделений. Бипирамидальный закон, напротив того, приложим ко всем этим отделениям, за исключением бипирамидального, а гемиморфический закон приложим только к одному бипирамидальному отделению. Из полученных ком-

[1]) Эти пирамиды, наравне с открытыми призмами, составляют особенные общие решения изоэдров и подходят под одну общую с ними формулу, так как подтипические изогоны для обоих случаев тожественны (см. „Дополнительную заметку“, стр. 171).

бинаций, однако, комбинация законов трапецоэдрического и бипирамидального не приводит к новому отделению, а лишь к бипирамидальному отделению системы, имеющей вдвое меньшее наименование (пентагональной). Что же касается комбинации бипирамидального закона с гемиморфическим, то она приводит к тому же отделению, что и комбинация гемиморфического закона с бипирамидальным. Поэтому всего остается еще нерассмотренными лишь 2 отделения.

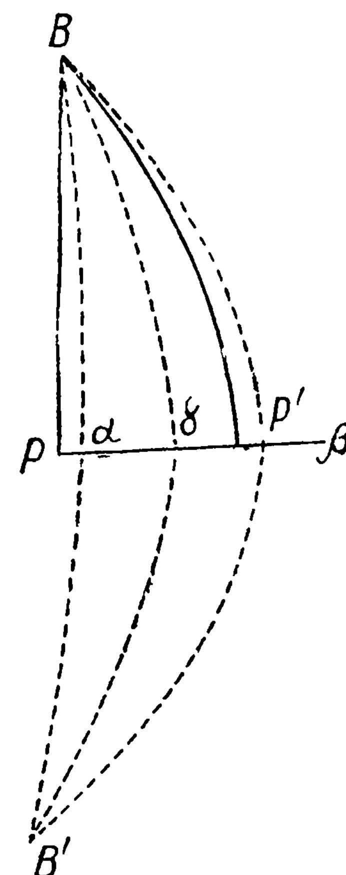
F. Отделение дельтоэдрическое

(Тетартоэдрия дельтоэдрическая или сфеноидальная)[1]

Тетартоэдрия эта получается от совокупления законов скаленоэдрического и бипирамидального. Получаются фигуры (фиг. 84), тожественные с фигурами скаленоэдрического отделения, соответствующими дугами BP и BP', т. е. пентагональные дельтоэдры. Эти фигуры, в отличие от фигур первого и второго рода, называются вообще фигурами третьего рода, конечно, за исключением тех, которые соответствуют тем же дугам. В этом случае вовсе нет плоскостей симметрии, а из осей симметрии лишь одна главная наименования 5.

G. Отделение пирамидальное

(Пирамидальная тетартоэдрия)



Фиг. 88.

Это отделение образуется из совокупления законов бипирамидального и гемиморфического. В нем (фиг. 88), так же как и в предыдущем, плоскости симметрии вовсе отсутствуют, а остается лишь одна главная ось наименования 10. Общее решение этого отделения — декагональная пирамида

[1]) По крайней мере, в частном случае симметрию этого отделения г. Гадолин назвал „сфеноидальною“ (Зап. Мин. общ., ч. IV, стр. 131, 1869).

(открытая) и притом третьего рода; линии же PP' соответствуют декагональные призмы третьего рода. Остальные же решения те же, что и в гемиморфическом отделении.

§ 52. Таким образом, каждая система распадается на одно полногранное, 4 гемиэдрических и 2 тетартоэдрических отделения; всего в системе 7 отделений, а именно:

Гомоэдрия	1) полногранное	отделение
Гемиэдрия	2) скаленоэдрическое	„
	3) трапецоэдрическое	„
	4) бипирамидальное	„
	5) гемиморфическое	„
Тетартоэдрия	6) дельтоэдрическое	„
	7) пирамидальное	„

Однако не во всех системах имеются все эти подразделения; нетрудно убедиться, что в системах нечетного наименования невозможны отделения скаленоэдрические. В самом деле, в этих отделениях главная ось должна иметь наименование, вдвое меньшее наименования системы, а так как последнее число нечетное, то первое получилось бы дробное, а это невозможно.

Исчезновение же скаленоэдрического отделения влечет за собой и исчезновение образующегося из него дельтоэдрического. Поэтому каждая нечетная система имеет следующие подразделения:

Гомоэдрия	1) полногранное	отделение
Гемиэдрия	2) трапецоэдрическое	„
	3) бипирамидальное	„
	4) гемиморфическое	„
Тетартоэдрия	5) пирамидальное	„

Только что приведенная классификация систем симметрии основывается, таким образом, на весьма существенном геометрическом факторе — периодическом повторении законов обра-

зования мэроэдрических отделений из гомоэдрических. Фактор этот мы можем условно назвать генетическим законом симметрии. Этот закон, и только один он, убеждает нас в том, что в данную классификацию вошли все возможные бесконечные виды симметрии общих решений. Другого фактора, убеждающего нас в том же, существовать не может, потому что, если только мы игнорируем этот закон, то, на основании каких бы то ни было точных данных мы ни соединили какую-нибудь группу отделений симметрии в систему, мы не можем быть убеждены в том, что и какая-нибудь другая группа на основании того же признака может быть также соединена в систему, ибо такое убеждение именно и было бы убеждением в справедливости генетического закона симметрии. Этот закон, следовательно, есть основной закон симметрии и в то же время закон периодичности подразделений симметрии.

Если мы пожелаем узнать, нет ли еще какого-нибудь геометрического признака, характеризующего систему симметрии, то увидим, что системы нечетного наименования точно характеризуются наименованием главной оси симметрии, тожественным с наименованием самой системы. Что же касается систем четного наименования, то их скаленоэдрическое и дельтоэдрическое отделения представляют исключения из этого правила, так как главные оси этих двух отделений имеют наименование, вдвое меньшее наименования системы.

Во всех отделениях систем общих решений вообще всегда главная ось отличается по наименованию от осей побочных (и промежуточных). Последние всегда имеют наименование 2, тогда как главная вообще по своему наименованию совпадает с наименованием системы (или же имеет вдвое меньшее наименование). Отсюда становится понятным, что в простейших системах — дигональной и моногональной, характеризующихся присутствием главной оси наименования 2 или отсутствием этой оси, различие между главною и побочными осями исчезает, а вследствие этого и некоторые различно образован-

ные отделения симметрии становятся тожественными, сливаются. Это имеет место именно по отношению к скаленоэдрическому и бипирамидальному отделениям дигональной системы: в обоих имеются одна двойная ось и перпендикулярная к ней плоскость симметрии с общим решением, представляющим две пары параллельных плоскостей; также к гемиморфному отделению дигональной и полногранному — моногональной системы: оба характеризуются присутствием двух взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии, пересекающихся в двойной оси, и имеют общим решением дидигональную пирамиду; также к пирамидальному отделению дигональной и трапецоэдрическому — моногональной системы: оба характеризуются присутствием лишь одной двойной оси симметрии и имеют общим решением пару пересекающихся плоскостей; наконец, к бипирамидальному и гемиморфному отделениям моногональной системы: оба характеризуются присутствием лишь одной плоскости симметрии и имеют общим решением пару пересекающихся плоскостей.

Отсюда видим, что в двух простейших системах сливаются не только отделения одной и той же, но и отделения двух разных систем. Ввиду этого для практических приложений полезно соединить обе системы в одну. Но ничто не мешает нам, также для практических целей, и вообще все нечетные системы соединить с четными, имеющими вдвое большее наименование. В таком случае из общей классификации выделятся нечетные системы и системы, в наименование которых входит делитель 2 один раз.

Кроме такого искусственного выделения, нужно в вышеизложенную классификацию еще внести поправку. В ней значатся гемиморфные отделения, как особенные виды гемиэдрии. Но так как отделения эти имеют все признаки полногранных, то для завершения классификации необходимо разделить каждую систему на 2 разряда, которые мы будем называть гомоморфным и гемиморфным, и при этом обозначении гемиморфное отделение будет полногранным отделением геми-

морфного разряда, а пирамидальное отделение — гемиэдрическим того же разряда.

Итак, каждая система, имеющая наименование $2n$, где n — нечетное число, может быть подразделена следующим образом:

Система $2n$-гональная[1]	группа (система) $2n$-гональная	разряд гомоморфный	1) полигранное	отделение
			2) скаленоэдрическое	„
			3) трапецоэдрическое	„
			4) бипирамидальное	„
			5) дельтоэдрическое	„
		разряд гемиморфный	6) полногранное	„
			7) пирамидальное	„
	группа (система) n-гональная	разряд гомоморфный	8) полногранное	„
			9) трапецоэдрическое	„
			10) бипирамидальное	„
		разряд гемиморфный	11) полногранное	„
			12) пирамидальное	„

§ 53. Отдельные фигуры некоторых простейших систем, начиная с гексагональной, имеют особенности, благодаря которым их названия выделяются из общей номенклатуры. Употребительные названия этих

---

[1]) Ввиду того, что разделение на группы сделано с практическими целями, а между тем термины, согласные с приведенной таблицей, были бы слишком сложны и потому неудобны, например, „полногранное отделение разряда гемиморфного $2n$-гональной группы $2n$-гональной системы“ (6), то я полагаю, что не было бы неудобно заменить эту номенклатуру следующею, в которой числа соответствуют числам таблицы:

1) гомоэдрия (дигональная)
2) скаленоэдрическая гемиэдрия
3) трапецоэдрическая „
4) бипирамидальная „
5) дельтоэдрическая тетартоэдрия
6) гемиморфия (дигональная)
7) пирамидальная гемиморфия
8) гемиэдрия (дигональная)
9) трапецоэдрическая тетартоэдрия
10) бипирамидальная „
11) тетартоморфия (дигональная)
12) пирамидальная тетартоморфия

О сопоставлении такого подразделения с подразделениями г. Гадолина см. „Второе приложение“ к этому отделу.

особенных фигур мы в следующей таблице сопоставляем с названиями, им принадлежащими по общей номенклатуре.

Гексагональная система

Тригональный дельтоэдр есть не что иное, как *ромбоэдр*

Тетрагональная система

Дигональный дельтоэдр есть не что иное, как *сфеноэдр* (квадратный сфеноид)

Дигональная система

Дидигональные	*бипирамиды*	называются	*ромбическими*
„	*пирамиды*	„	„
„	*призмы*	„	„
Дигональные	*бипирамиды*	„	*гемипирамидами*
„	*пирамиды* особого названия не имеют		
„	*призмы*	называются	*гемипризмами*
„	*трапецоэдры*	„	*ромбическими сфеноидами*
Моногональные	*скаленоэдры*	тожественны с	*дигональными бипирамидами*
„	*дельтоэдры*	называются	*тетартопирамидами*

Моногональная система

Димоногональные	*бипирамиды*	тожественны с	*дидигональными пирамидами*
„	*пирамиды*	„ „	*моногональными бипирамидами*
„	*призмы*	особого названия не имеют	
Моногональные	*бипирамиды*	„ „ „ „	
„	*пирамиды*	„ „ „ „	
„	*призмы*	„ „ „ „	
„	*трапецоэдры*	тожественны с	*дигональными пирамидами*

§ 54. Остается сказать несколько слов о симметрии конусов. Очевидно, что коническая система симметрии разделяется на два отделения, соответствующих разрядам других систем, а именно гомоморфное или полногранное и гемиморфное.

Гомоморфное отделение характеризуется присутствием главной оси симметрии бесконечного наименования и бесконечным числом побочных двойных осей, какими является каждый радиус главной плоскости. Отсюда заключаем о присутствии главной плоскости симметрии и бесконечного множества побочных проходящих через главную ось. Общим решением являются биконусы, число коих, однако, бесконечно большое первого порядка; предельными решениями будут базопинакоид и цилиндр (обе фигуры единичны).

В гемиморфном отделении остаются только главная ось и побочные плоскости симметрии. Общим решением будут конусы, а предельными решениями — одна плоскость и цилиндр.

Таким образом, коническая система имеет наиболее совершенную симметрию из всех систем общих решений типических изоэдров.

ПЕРВОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ОТДЕЛУ III (стр. 177)

Симметрия плоских и телесных фигур представляет собою сравнительно новый предмет исследования. Правда, что понятие о плоскости симметрии перешло к нам, вероятно, из глубокой древности (к чему должно было побуждать обилие окружающих человека предметов с такою симметрией, например, животных), но более определенные понятия современного учения о симметрии стали вырабатываться лишь с середины текущего столетия, и поводом к этому послужило изучение кристаллов, к которому и по настоящее время преимущественно приноровлено само учение. Почти одновременно появились замечательная работа Браве (Mémoire sur les polyèdres de forme symmétrique. Journ. de math. par Liouville, т. 14, стр. 141),[67] ставшая основанием наших теперешних представлений об этом предмете и выходящая из пределов одних кристаллических форм, а также одна за другою работы Мебиуса (Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme. Crelle Journ., т. 43, стр. 365 и сл. — Ueber symmetrische Figuren. Там же, т. 44, стр. 335 и сл.). В первой из этих статей мы находим лишь проблески нового учения; во второй же — попытку выразить законы симметрии равенством рядов элементов. Из дальнейших работ особенное внимание обращают на себя

„Recherches sur les polyèdres“ К. Жордана (C. Jordan, Crelle Journ., т. 66, стр. 22 и сл.), в которой автор переходит за пределы симметрии, собственно так называемой, и излагает новое представление о видимости (aspect) многогранника; впрочем, представление это совершенно совпадает с тем, на котором основано выраженное на предыдущих страницах определение видимой однородности. Симметричными он называет те фигуры, которые имеют одну и ту же видимость с разных точек зрения; основываясь на этом определении, он выводит возможные симметрические системы (весьма похвальный отзыв об этой работе был сделан в заседании Французской Академии наук Бертраном, см.: Journ. de math. par Liouville, т. 11, стр. 217). Наконец, „Вывод всех кристаллографических систем и их подразделений из одного общего начала“ А. Гадолина (Зап. Мин. общ., ч. IV, стр. 112 и сл., 1869) можно считать завершением этой теории по отношению к фигурам кристаллическим. Здесь, между прочим, мы научаемся отчетливо различать при изучении симметрии равенство совмещения и равенство симметричное.

Тот же предмет, но уже с другой точки зрения (по отношению к системам точек), составлял предмет исследования целого ряда авторов, имевших в виду исключительно кристаллографические цели. Завершением работ в этом направлении можно считать труд Л. Зонке (L. Sohncke. Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur. 1879), к которому придется вернуться в конце следующего отдела.

Что касается способа, употребленного в этом III отделе, то он совершенно отличен от упомянутых раньше, и самый вывод приведен лишь постольку, поскольку это необходимо для определения систем симметрии и их подразделений.

Наиболее совершенной симметрией обладают те фигуры какой-нибудь системы, которые относятся к отделению, названному гомоэдрическим. Если приготовить трехгранное зеркало, двугранные углы которого были бы те же самые, что у элементарного тригоноэдра такого отделения, то, налив в него жидкость, мы увидим в зеркале какую-нибудь фигуру этого отделения, а именно фигуру, соответствующую радиусу-вектору, нормальному к уровню жидкости, т. е. вертикальному. Поворачивая зеркало, мы можем, следовательно, воспроизвести всевозможные фигуры этого отделения. Такого рода „гоноэдрические“ зеркала я имел честь демонстрировать на одном из заседаний имп. Минералогического общества в начале 1883 г. Зеркала эти были связаны с прибором, дававшим возможность автоматически установить зеркало для получения какой-угодно фигуры данного отделения. Намек на возможность такого демонстративного прибора мы встречаем в упомянутой выше статье Мебиуса (Crelle Journ., т. 43, стр. 374), который говорит, что за известными исключениями „die Krystalle kaleidoscopische Figuren sind, und das System, zu

welchem ein Krystall gehört, wird durch den Speigelwinkel des Kaleidoscops bestimmt".[68] Однако, правильнее было бы сказать наоборот, что в виде исключения кристаллы представляют калейдоскопические фигуры, так как это свойство принадлежит только фигурам гомоэдрических (в виде исключения также тетраэдрического) отделений, но, конечно, и не одним только кристаллическим.

Для демонстрирования других отделений фигур, на том же заседании мною предложен другой гоноэдрический прибор, состоящий из шара и вращающихся на его поверхности пластинок, образующих определенные углы. Сущность этого прибора ясна из самого изложения подразделений систем симметрии.

ВТОРОЕ ПРИЛОЖЕНИЕ (стр. 221)[69]

Сопоставление подразделений простейших систем, выведенных в этом произведении, с подразделениями г. Гадолина

Подразделения, здесь выведенные Гексагональная система	Подразделения г. Гадолина Гексагональная система
1. Гомоэдрия	Голоэдрия
2. Скаленоэдрическая гемиэдрия	Ромбоэдрическая гемиэдрия
3. Трапецоэдрическая гемиэдрия	Трапецоэдрическая „
4. Бипирамидальная гемиэдрия	Пирамидальная „
5. Дельтоэдрическая тетартоэдрия	Ромбоэдрическая тетартоэдрия
6. Гемиморфия	Голоэдрическая гемиморфия
7. Пирамидальная гемиморфия	Гемиморфия трапецоэдрической и пирамидальной гемиэдрии
8. Гемиэдрия	Тригонотипная гемиэдрия
9. Трапецоэдрическая тетартоэдрия	Трапецоэдрическая тетартоэдрия
10. Бипирамидальная тетартоэдрия	Пирамидальная „
11. Тетартоморфия	Гемиморфия ромбоэдрической и тригонотипной гемиэдрии
12. Пирамидальная тетартоморфия	Тетартоэдрическая гемиморфия

Тетрагональная система	Квадратная система
1. Гомоэдрия	Голоэдрия
2. Скаленоэдрическая гемиэдрия	Сфеноэдрическая гемиэдрия
3. Трапецоэдрическая „	Трапецоэдрическая „
4. Бипирамидальная „	Пирамидальная „
5. Дельтоэдрическая тетартоэдрия	Тетартоэдрия
6. Гемиморфия	Гемиморфия голоэдрическая
7. Пирамидальная гемиморфия	„ гемиэдрическая

Дигональная система	
1. Гомоэдрия	Голоэдрия ромбической системы
2. Скаленоэдрическая (также бипирамидальная) гемиэдрия	„ моноклиноэдрической системы
3. Трапецоэдрическая гемиэдрия	Гемиэдрия ромбической системы
4. Дельтоэдрическая тетартоэдрия	Голоэдрия триклиноэдрической системы
5. Гемиэдрия (также гемиморфия)	Гемиморфия ромбической системы
6. Трапецоэдрическая тетартоэдрия (также пирамидальная гемиморфия)	„ моноклиноэдрической системы
7. Бипирамидальная тетартоэдрия (также тетартоморфия)	Гемиэдрия моноклиноэдрической системы
8. Пирамидальная тетартоморфия	Гемиэдрия триклиноэдрической системы

ТРЕТЬЕ ПРИЛОЖЕНИЕ

Если означим число равных осей и их соответственное наименование через P, Q, R, и p, q, r, то получим, что вращением около них каждая из них произведет из данной точки число точек, равное ее наименованию. Приняв точки за вершины симметричной фигуры, а именно, подтипического изогона, получим для числа вершин n

$$n = 1 + P(p-1) + Q(q-1) + R(r-1). \qquad (1)$$

Если притом фигура обладает плоскостями симметрии, то получим

$$n = 2[1 + P(p-1) + Q(q-1) + R(r-1)] \qquad (2)$$

формулу Браве. Прямая, проведенная через центр и данную точку, означит известное направление; из формулы (1) получаем для данной системы осей число совместимо равных направлений, а из формулы (2) — число совместимо и симметрично равных направлений. В частных случаях число равных направлений уменьшается, а именно, если направление проходит в плоскости симметрии, то число n уменьшается вдвое, а если за направление возьмем одну из осей, то получим число меньшее n во столько раз, сколько выражается четверным наименованием оси, но это же число есть число равных осей. Отсюда заключаем [из формулы (2)], что

$$\frac{n}{4p}=P;\ \frac{n}{4q}=Q;\ \frac{n}{4r}=R. \qquad (3)$$

Значит[70]

$$n=2+\frac{n}{2}\left(\frac{p-1}{p}+\frac{q-1}{q}+\frac{r-1}{r}\right)$$

или

$$n=\frac{4}{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-1}. \qquad (4)$$

Если примем во внимание, что числа p, q и r вдвое меньше наименований граней основного изогона, и если эти наименования означим соответственно через k, l и m, то получаем

$$n=\frac{2}{\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2}},$$

т. е. формулу, тожественную с выведенной для тригоноэдрических изогонов (II отделение, формула 30а, стр. 110).

Если плоскостей симметрии вовсе не существует, то в формуле (1)

$$\frac{n}{2p}=P;\ \frac{n}{2q}=Q;\ \frac{n}{2r}=R,$$

откуда

$$n = 1 + \frac{n}{2}\left(\frac{p-1}{p} + \frac{q-1}{q} + \frac{r-1}{r}\right)$$

или

$$n = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1}. \quad (5)$$

Так как в числе осей всегда имеются оси наименования 2, то для того случая, если имеется одна система таких осей, получаем

$$n = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{2}}. \quad (5a)$$

Эта формула применима для всех призмоэдров.

Для тех же случаев, когда имеется две системы таких осей, формула (5) принимает вид

$$n = 2p. \quad (5b)$$

Эта формула применима для призмоидов.

Подобным же образом можно упростить общие формулы (1) и (2) для тех случаев, когда число систем осей сокращается.

ОТДЕЛ IV

УЧЕНИЕ О ПОЯСАХ И ВЫПОЛНЕНИИ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА



Глава 11

ВЫПОЛНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ[71]

Вступление

§ 55. Всякая прямая разделяет плоскость на две половины, из которых одну мы назовем внутреннею, а другую внешнею. То же обозначение можно принять и для ломаной, если она замещает собою отрезок бесконечной прямой между двумя точками.

Кроме того, каждой прямой, так же как и ломаной, рассматриваемой как только что указано, можно приписать известное направление. Как известно, углом между двумя прямыми известного направления называется тот угол, который образуется между этими двумя прямыми, если считать их направляющимися от вершины. При этих условиях угол между прямыми становится равным нулю лишь в том случае, если обе взятые прямые не только параллельны, но и имеют одинаковое направление. Если же они имеют противоположное направление, то угол этот будет, очевидно, $2d$, а так как при этом сохраняется кажущаяся параллельность, то для отличия от настоящей мы будем называть ее обратною параллельностью.

Понятие о внутренней или внешней части плоскости (или, как можно выразиться, внутренней или внешней стороне прямой или ломаной) мы можем привести в связь с понятием о направлении этих линий, а именно, мы можем условиться

внутреннею частью называть ту, которая останется вправо, если мы представим себя ходящими в вертикальном положении по данной непрерывной линии и притом по ее направлению. Пользуясь этим условием, мы легко определим внутреннюю и внешнюю сторону периметра какого-нибудь многоугольника. Ясно, что если за направление ломаной, составляющей периметр мы примем то, полный оборот которого будет соответствовать обороту часовой стрелки, то внутреннею стороною каждой составляющей прямой будет та, которая, как говорится, обращена внутрь многоугольника, и внешнею — та, которая обращена вне фигуры. Обратное получится, если мы примем обратное направление сторон фигуры.

Как известно из теории подобия, мы всегда две подобные фигуры можем расположить так, чтобы все прямые, соединяющие соответственные точки обеих фигур, пересекались в одной точке — центре прямого или обратного подобия. В случае обратного подобия, соответственные прямые обратно параллельны, однако, направлению по часовой стрелке сторон одного периметра будет соответствовать такое же направление сторон другого; если означим этот центр через O, соответственные точки одной фигуры через A, B, C,... и другой — через A', B', C', ..., то, как известно $\frac{AO}{A'O} = \frac{BO}{B'O} = \frac{CO}{C'O} = \ldots$ Следовательно, если какие-нибудь два радиуса-вектора AO и $A'O$ равны между собою, то будут равны и все другие соответственные радиусы-векторы; это случай обратного равенства. В этом случае мы имеем, следовательно, равенство и обратную параллельность соответственных линейных элементов, но одинаковое общее направление замкнутых периметров, и, значит, внутренней стороне одного из них будет соответствовать внутренняя же сторона другого, обратно ему равного. В случае прямого подобия не только общее направление замкнутых периметров, но и направления соответственных элементов одинаковы. Если центр прямого подобия удаляется в бесконечность, то подобие пере-

ходит в равенство, собственно так называемое, и притом всякие две фигуры будут находиться в параллельном положении, и внутренней стороне одной фигуры будет опять соответствовать внутренняя же сторона другой. На основании сказанного не трудно заключить, что ради простоты удобно принимать в замкнутых периметрах направление сторон, всегда соответствующее движению часовой стрелки, так как при этом внутренняя сторона периметра будет всегда та, которая обращена внутрь многоугольника.

Если какой-нибудь многоугольник имеет центр, то ясно, что центр этот будет собственно центром обратного равенства его сторон, и потому стороны его будут попарно равны и обратно параллельны, но всегда внутренней стороне одной из этих прямых будет соответствовать внутренняя же сторона другой.

Если имеется какая-нибудь непрерывная ломаная $abc\ldots$, где a, b,... означают составляющие ее отрезки прямых с определенным направлением, то ясно, что каждая сторона a образует со следующей b некоторый угол, и притом угол этот находится на внутренней половине плоскости по отношению к предыдущей стороне a или на внешней ее половине. В первом случае мы будем считать углы положительными и приписывать им знак плюс; во втором случае — наоборот; другими словами, угол будет положительным, если следующая сторона уклоняется от предыдущей по направлению часовой стрелки; для отрицательного же угла уклонение будет обратное.

Примечание. Если какую-нибудь плоскую фигуру мы обернем, то при равенстве всех ее элементов с соответственными элементами данной фигуры, их последовательность будет прямо противоположна, т. е. если в первой фигуре от одной стороны к другой мы будем переходить по направлению часовой стрелки, то переход от одного элемента к другому в том же порядке, но в другой фигуре должен быть совершен по обратному направлению.

Ясно, что это будет случай двух симметричных фигур (вообще несовместимых и совместимых лишь в том случае, когда они сами симметричны по отношению какой-нибудь прямой; в этом случае эти две фигуры одновременно равны и симметричны).

Мы заключим эти вступительные соображения теоремой, которая нам будет нужна при изложении следующей теории.

Теорема 1. *Угол между двумя данными составными прямыми какой-нибудь ломаной равен алгебраической сумме углов между ее смежными прямыми, взятыми в пределах двух данных.*

Пусть дана ломаная $abc\ldots\ klm\ldots$, и требуется определить угол между прямыми a и m. Возьмем произвольную точку и будем последовательно проводить через нее прямые, параллельные a, b, ... до m включительно. Ясно, что получаемые таким образом последовательные углы будут равны соответственным углам между смежными прямыми ломаной как по величине, так и по знаку; ясно также, что и алгебраическая сумма полученных углов будет та же, что сумма всех углов между смежными прямыми ломаной в пределах от a до m; очевидно, однако, что сумма эта не что иное, как угол между прямыми a и m, так как в результате мы приходим к углу между прямыми, параллельными этим последним.

Параллелогоны

§ 56. Определение 1. Выполнением плоскости называется такое сочетание плоских фигур на плоскости, при котором каждая сторона каждой фигуры есть общая двум.

Определение 2. Выполнением плоскости в параллельном положении называется такое, при котором равные фигуры, выполняющие плоскость, находятся в параллельном положении.

Примечание. Ясно, что система равных правильных трехугольников, выполняющих плоскость, не удовлетво-

ряет этому определению, так как соответственные стороны смежных фигур обратно параллельны.

Определение 3. Равные или симметричные многоугольники, выполняющие плоскость не в параллельном положении, называются планигонами; если же они выполняют в параллельном положении, то называются параллелогонами.

Определение 4. Четноугольником называется такой многоугольник, которого стороны попарно параллельны между собою.

Теорема 2. *В выпуклом многоугольнике не может быть больше чем по одной паре параллельных сторон.*

Допустим, что в многоугольнике $abc\ldots\ def\ldots\ klm\ldots$ параллельны между собою a, d и k. Если мы примем считать направление сторон по часовой стрелке и если две стороны a и k обратно параллельны, то третья из них d должна быть во всяком случае прямо параллельна одной из этих сторон, например a. Но если бы многоугольник был выпуклый, то все углы между его смежными сторонами были бы положительны; сумма же этих углов в пределах от a до d по теореме 1 равна углу между этими сторонами, т. е. нулю, а это невозможно.

Следствие. В выпуклом четноугольнике имеется лишь по одной паре параллельных сторон.

Определение 5. Парносторонником называется такой четноугольник, которого соответственные параллельные стороны равны между собою.

Теорема 3. *Выпуклый парносторонник имеет центр.*

На основании теоремы 2 в нем имеется лишь по одной паре равных параллельных сторон, и притом, если мы примем направление по часовой стрелке, то получим, что каждые две стороны пары обратно параллельны друг другу. Пусть a равна и обратно параллельна a', и пусть за ней следует сторона b, а за a' следует не b', а c', $d\ldots$ и наконец b'. Называя ряд углов между стороною a и следующими за нею через $a'c'$, $a'd'\ldots\ a'b'$, мы на основании теоремы 1 заключаем,

что это ряд положительных величин, постоянно возрастающих, и, значит, какой-нибудь угол $a'd'$ меньше $a'b'$. Так как величина этого угла положительна, то сторона d, равная и обратно параллельная d', должна находиться в ряду $ab \ldots d$; поэтому $ad > ab$, но так как ad равна $a'd'$ и ab равна $a'b'$, то, значит, мы пришли к невозможности, благодаря сделанному допущению, будто за прямой a' не следует b'. Если же в системах равных и обратно параллельных сторон $abc \ldots$ и $a'b'c' \ldots$ стороны идут в одинаковой последовательности, то, значит, сами системы обратно равны друг другу, и, следовательно, имеется центр обратного равенства, который и будет центром выпуклого парностороннике.

§ 57. Теорема 4. *Параллелогон есть парносторонник.*

В самом деле, если бы какой-нибудь стороне AB параллелогона не было бы в нем же другой, ей равной и обратно параллельной, то сторона AB была бы единственною, с которою могла бы быть совмещена соответственно равная и параллельная ей сторона смежной фигуры. Но именно в силу параллельности самих фигур при совмещении точка A совпадает с точкою A' и B с B'; точно также должны совпасть и следующие стороны BC и $B'C'$ и т. д.; словом, должно произойти полное совмещение самих фигур, а по предположению взята фигура, смежная с первой по стороне AB; значит, присутствие стороны AB необходимо влечет за собою присутствие равной и обратно параллельной ей стороны A_1B_1, которая при выполнении плоскости должна совмещаться со стороной $A'B'$ другой фигуры, если $A'B'$ соответствует стороне AB первой фигуры.

Примечание. Каждая сторона AB, общая двум выполняющим плоскость параллелогонам, имеет два противоположных направления, смотря по тому, будем ли мы рассматривать ее как сторону одной или другой фигуры. В этом смысле мы можем сказать, что общая сторона двух фигур имеет для каждой из них в отдельности противоположное значение или знак.

Определение 6. Параллелогон, имеющий центр, называется первичным; в противном случае он будет вторичным.

Определение 7. Первичный параллелогон, имеющий лишь одну пару равных и обратно параллельных сторон, называется простым; в противном случае он будет сложным.

Следствие. На основании следствия теоремы 2, а также на основании теорем 3 и 4 мы заключаем, что все выпуклые параллелогоны представляют собою фигуры простые.

Теорема 5. *В системе выполняющих плоскость простых параллелогонов при каждой вершине сходится не меньше трех углов.*

Пусть при вершине B сходятся только два угла; ясно, что один из них должен быть больше, а другой меньше чем $2d$. Пусть угол ABC одной фигуры больше $2d$ (т. е. вогнутый), а угол $A'B'C'$ — угол другой фигуры, и притом $A'B'$ совмещается с AB и $B'C'$ — с BC. Тогда, так как данный параллелогон по условию первичный, то сторонам AB и BC первой фигуры соответствуют в ней же равные и обратно параллельные стороны A_1B_1 и B_1C_1, которые также образуют вогнутый угол. Напротив того, сторонам $A'B'$ и $B'C'$ второй фигуры соответствуют равные и обратно параллельные стороны $A_1'B_1'$ и $B_1'C_1'$, образующие между собою выпуклый угол. Но так как в данных фигурах, как простых, не может быть еще других сторон, параллельных сторонам AB, то, значит, самые фигуры не равны, и потому не могут быть параллелогонами (по определению 2).

Следствие. Так как сумма углов около одной точки равна $4d$, то, означив число сторон какого-нибудь простого параллелогона через m, получим, что средняя величина внутреннего угла должна быть не больше $\frac{4d}{3}$, т. е. $\frac{2d\,(m-2)}{m} \leqslant \frac{4d}{3}$ или $m \leqslant 6$, т. е. наибольшее число сторон простого параллелогона есть 6 и, значит (по теореме 4), могут существовать параллелогоны только с двумя и тремя парами сторон.

Параллелогоны эти мы будем называть ди- и трипараллелогонами. Очевидно, что дипараллелогон — то же, что и параллелограм. Так как не может существовать четырехугольника с парою вогнутых углов, то, значит, имеется лишь один простой вогнутый трипараллелогон, а именно фигура с парою противоположных вогнутых углов.

§ 58. Примечание. Познакомившись с простыми параллелогонами, мы бросим общий взгляд на сложные и вторичные фигуры.

Существование сложных фигур очевидно, так как стоит лишь нам взять пару смежных параллелогонов и мы всегда получим параллелогон; но этот параллелогон будет вообще сложным, так как пары сторон простого параллелогона повторяются в нем два раза. Исключение представляет лишь дипараллелогон, так как совокупность двух смежных таких фигур образует снова простой же дипараллелогон. Легко понять, что вообще можно образовать группы сложных параллелогонов из совокупности простых, и, между прочим, ряд смежных простых параллелогонов, имеющих общие равные и параллельные стороны, образуют всегда такой сложный параллелогон (опять за исключением дипараллелогонов).

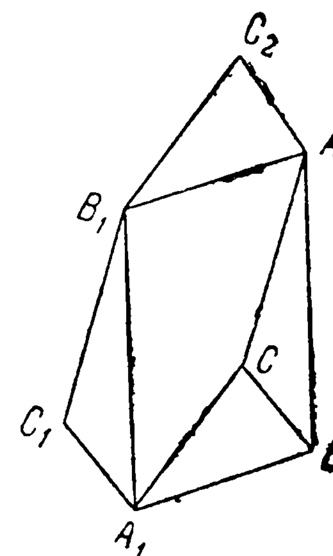
Что касается вторичных фигур, возможность их видна из того, что если мы примем две какие-нибудь равные и обратно параллельные стороны простого параллелогона за равные отрезки параллельных прямых, и если отрезки эти или их части, взятые соответственно, мы заместим ломаными, равными и параллельными, то, если только ломаные эти не пересекутся ни между собою и не пересекут стороны параллелогона, мы придем к новому параллелогону, вообще не имеющему центра и, следовательно, вторичному. В частном случае можно получить снова первичный параллелогон, например, если в дипараллелогоне ABA_1B_1 (фиг. 89) стороны AB и B_1A_1 мы заместим равными и параллельными ломаными ACB и $B_1C_1A_1$, и затем в полученном вторичном

стороны BA_1 и AB_1 мы заместим ломаными BCA_1 и AC_2B_1, то получим первичный трипараллелогон, так как по построению стороны его будут попарно равны и обратно параллельны.

§ 59. Определение 8. Соответственными точками системы параллелогонов называются те, которые совмещаются при совмещении самих фигур (и при том совмещении в параллельном положении, если могут иметь место и другие совмещения).

Определение 9. Соответственными направлениями называются прямые, проходящие через соответственные точки двух смежных (т. е. имеющих общую сторону) фигур системы параллелогонов.

Теорема 6. *Система соответственных точек есть система параллелограмов или плоская сетка* (ebenes Netz).



Фиг. 89.

Возьмем в каком-нибудь параллелогоне точку A, и пусть B будет соответственная точка смежной фигуры, и, значит, AB будет соответственная прямая этой системы фигур. Так как параллелогон с точкою A должен совместиться в параллельном положении с параллелогоном с точкою B, то, значит, совмещение это может быть произведено поступательным движением первой фигуры по прямой и на величину AB. Если мы заставим теперь тот же параллелогон двигаться дальше в том же направлении, то, пройдя путь $BC = AB$, он снова придет в совпадение со следующим смежным параллелогоном и т. д.; словом, мы получим ряд фигур, соответственные точки которых образуют ряд равно отстоящих друг от друга точек.

Но так как параллелогон не может иметь менее двух пар параллельных сторон, то, значит, такие же совмещения мы можем произвести поступательным движением в некотором другом направлении AA_1, и при этом получим другой ряд фигур, соответственные точки которых A, A_1, $A_2, \ldots$ снова

образуют ряд равно отстоящих точек. Но равные и параллельные ряды точек мы можем получить, исходя не только из точки A, но также и из точек B, C и т. д., словом, из всех точек первого ряда. Таким образом мы получим систему точек, образующих вершины выполняющих плоскость параллелограмов (узлы плоской сетки).

Если параллелогон A (т. е. фигура, для которой точка A есть соответственная точка системы) имеет с параллелогоном B какие-нибудь общие стороны, то точно также фигура A_1 имеет с фигурой B_1 такие же стороны, равные и параллельные первым, и т. д., и, следовательно, все фигуры ряда $AA_1A_2\dots$ имеют со смежными им фигурами ряда $BB_1B_2\dots$ такие же равные и пераллельные стороны. Следовательно, между двумя такими смежными рядами не может находиться еще ряд таких же фигур; значит, и внутри рядов соответственных точек $AA_1A_2\dots$ и $BB_1B_2\dots$ не может находиться никаких других соответственных точек системы, а потому плоская сетка в своих узлах заключает всевозможные соответственные точки системы параллелогонов.

Следствие a. Нетрудно убедиться, что система соответственных точек дипараллелогонов образует плоскую сетку, равную и параллельную той, которая представляется системою самих фигур.

Следствие b. Так как в простом параллелогоне имеется лишь по одной паре равных и обратно параллельных сторон, а каждой такой паре соответствует поступательное движение, приводящее к совмещению двух смежных фигур, то значит, такая пара обусловливает собою соответственное направление. Другими словами, число соответственных направлений для каждого первичного параллелогона равно числу пар его сторон, и, значит, не больше трех.

Теорема 7. *Соответственные точки системы параллелограмов (плоской сетки), соответствующей данной системе параллелогонов, представляют собою также и соответственнные точки самой данной системы фигур.*

Если мы возьмем какую-нибудь точку внутри одного из параллелограмов плоской сетки, соответствующей данной системе параллелогонов, то система ей соответственных точек по отношению к этой сетке образует новую сетку, равную и параллельную первой (следствие „а" теоремы 6); но для получения всех точек, соответственных данной по отношению к данной системе параллелогонов, мы можем построить ряды равно отстоящих точек, равные и параллельные рядам той же плоской сетки (теорема 6), и, следовательно, придем к системе точек, тожественной с первой.

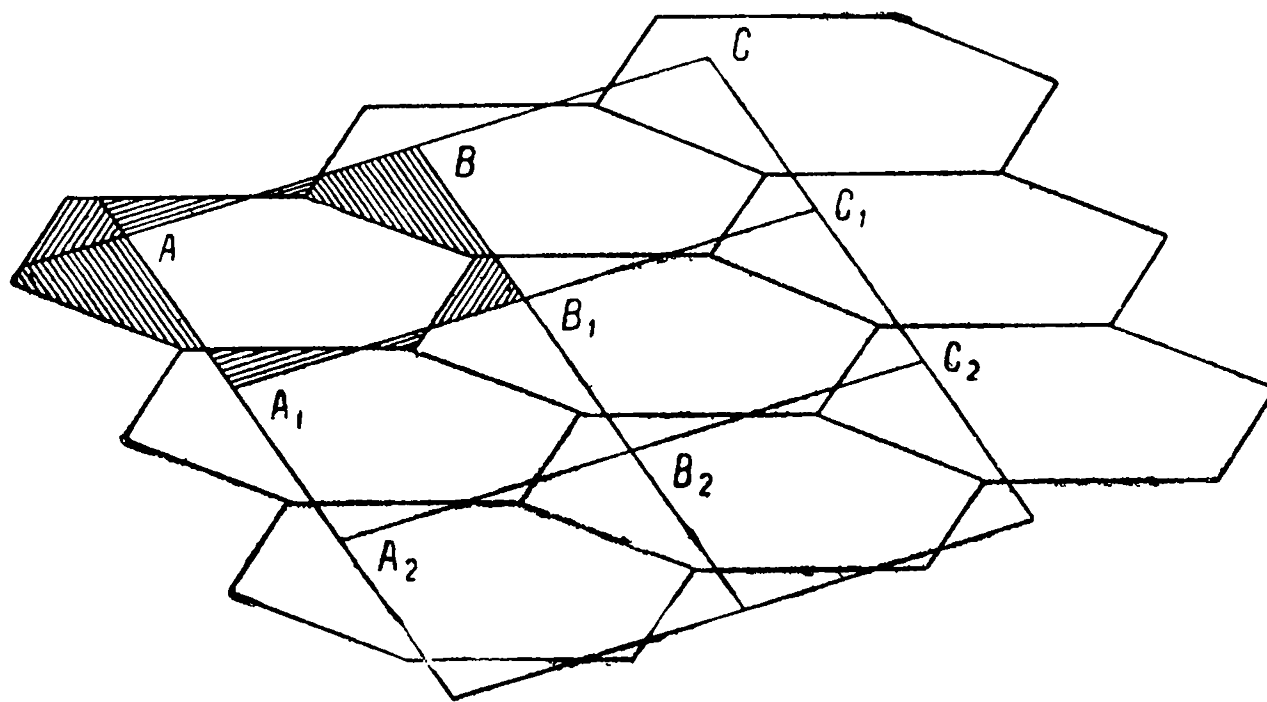
Теорема 8. *Площади данных параллелогонов и параллелограмов соответствующей им плоской сетки равны между собой.*

На основании предыдущей теоремы, каждой точке, взятой внутри какого-нибудь параллелогона и параллелограма соответствующей ему плоской сетки, соответствует система точек во всех параллелогонах и во всех параллелограмах сетки, образующая одну и ту же новую плоскую сетку.

Если теперь вместо точки возьмем некоторый элемент площади, выбранный так, чтобы он находился одновременно внутри параллелогона и внутри параллелограма соответствующей сетки, то точно так же во всех параллелогонах и во всех параллелограмах сетки найдутся соответственные элементы, образующие в совокупности тожественную систему как по отношению к параллелогонам, так и по отношению к параллелограмам сетки. То же относится и до всякого избранного таким образом элемента. Если мы возьмем такую совокупность этих элементов, положим числом n, чтобы она выполнила собою площадь одного из параллелограмов сетки, то соответственные ему элементы выполнят площади всех параллелограмов системы, т. е. всю плоскость; а так как те же элементы представляют собою также соответственные элементы системы параллелогонов, то, значит, совокупность из n тех же самых элементов выполнит собою также и пло-

щадь одной из этих фигур, которая, следовательно, равна площади параллелограма сетки.

Следствие. Отсюда мы видим, что, как бы ни была сложна фигура параллелогона, площадь его всегда можно определить весьма просто: нужно только, взяв внутри его какую-нибудь точку, найти две соответственные смежные точки; параллелограм, построенный по этим двум сторонам, будет равномерен данному параллелогону. Для каждого частного случая это легко доказать построением, как это, например, сделано на фиг. 90, на которой параллельно заштрихованы те равные части, которые нужно придать и отнять от данного трипараллелогона, чтобы получить равномерный ему параллелограм плоской сетки.



Фиг. 90.

§ 60. Определение 10. Парою параллелогонов второго порядка называются две такие отличающиеся друг от друга плоские фигуры, которые, вместе взятые, образуют параллелогон первого порядка или собственно так называемый.

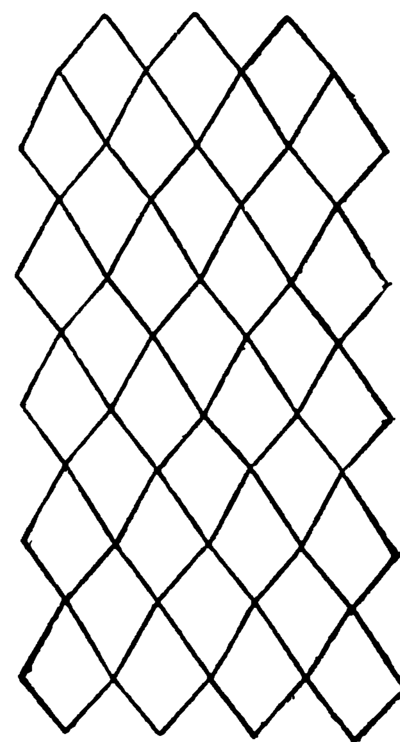
Основываясь на этом определении, мы сделаем

систематический вывод параллелогонов второго порядка,

причем ограничимся одними выпуклыми фигурами, которые будем называть соответственно α и β.

При этом выводе мы можем встретить два случая: 1) все стороны каждой фигуры общи обоим и 2) некоторые стороны этих фигур общи фигурам того же наименования.

В первом случае при каждой вершине системы параллелогонов второго порядка должно происходить чередование α- и β-фигур; другими словами, число сторон около каждой вершины системы должно быть четное и не меньше 4. Отсюда заключаем, что или обе фигуры должны быть четырехугольниками (фиг. 91), или же одна из них должна быть трехугольником (так как средняя величина угла обеих фигур должна быть равна или меньше $\frac{4d}{4} = d$). Но так как при взятом условии число сторон обеих фигур должно быть одинаковое (так как, если бы число сторон α-фигуры было больше чем β-фигуры, то некоторые стороны α-фигур системы должны бы быть общими α же фигурам, что противно принятому условию), то, значит, в этом случае трехугольником же будет и вторая фигура.

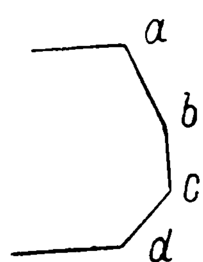


Фиг. 91.

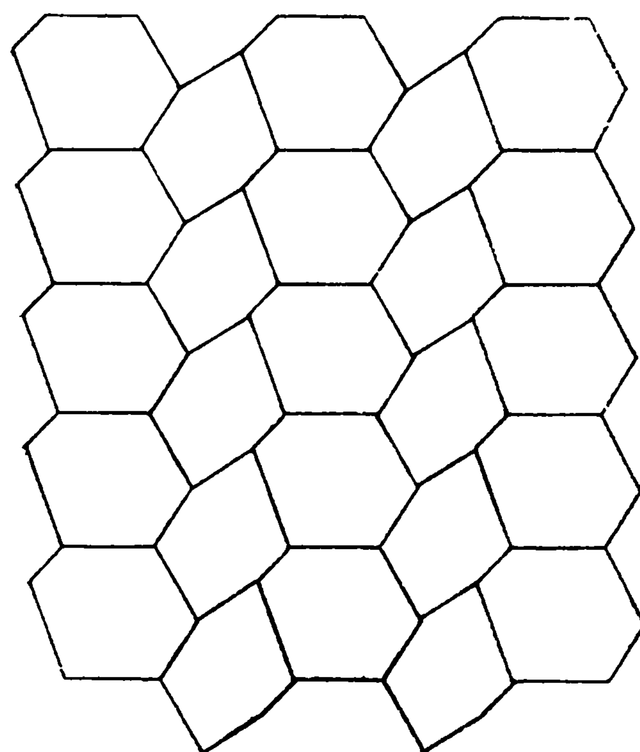
Во втором случае мы опять можем различить два подслучая: a) одна или обе фигуры имеют не больше одной пары общих сторон с фигурами того же наименования или b) хоть одна фигура имеет больше чем одну пару общих сторон с фигурами одноименными.

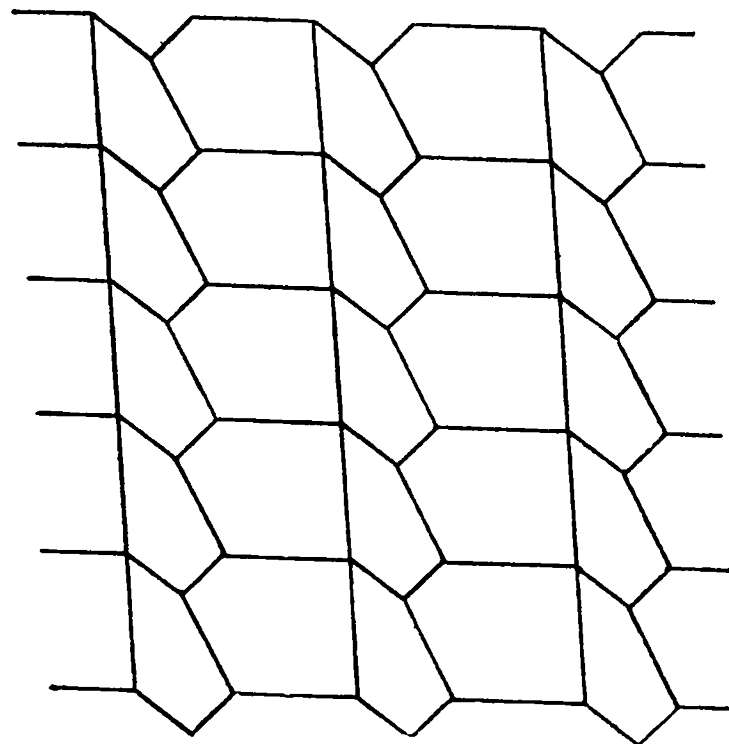
Мы говорим здесь про пары сторон, потому что, если одна из фигур, например α, имеет с α же фигурой какую-нибудь общую сторону, то та же фигура необходимо должна иметь и другую сторону, равную и обратно параллельную первой, так как по определению этих фигур одноименные из них входят в системе в параллельном положении, и потому, если они имеют общую сторону, то к ним применимо то же рассуждение, что и для теоремы 4.

В подслучае а) те фигуры, которые имеют одну общую пару сторон, образуют ряды фигур, и притом ряды, равные и параллельные в силу равенства и параллельности составляющих их фигур. Ряды эти существенно отличаются от рядов собственно параллелогонов тем, что два смежных не могут вовсе иметь общих сторон; иначе фигуры, входящие в их состав, например α-фигуры, имели бы больше чем одну пару общих сторон с одноименными им фигурами, что относится уже ко второму подслучаю. Фигуры этого подслучая мы будем называть рядовыми параллелогонами второго порядка. В выпуклых рядовых параллелогонах, кроме пары параллельных сторон, не может быть еще больше двух сторон, которые находились бы в промежутке между параллельными сторонами. В самом деле, если бы таких сторон было, например, три ab, bc и cd (фиг. 92), то, все равно, будет ли сторона



Фиг. 92.

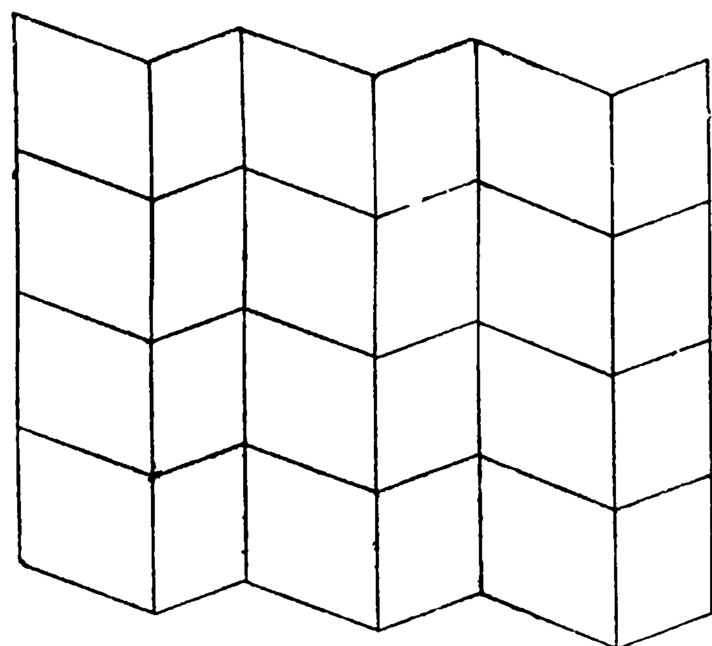

Фиг. 93.


Фиг. 94.

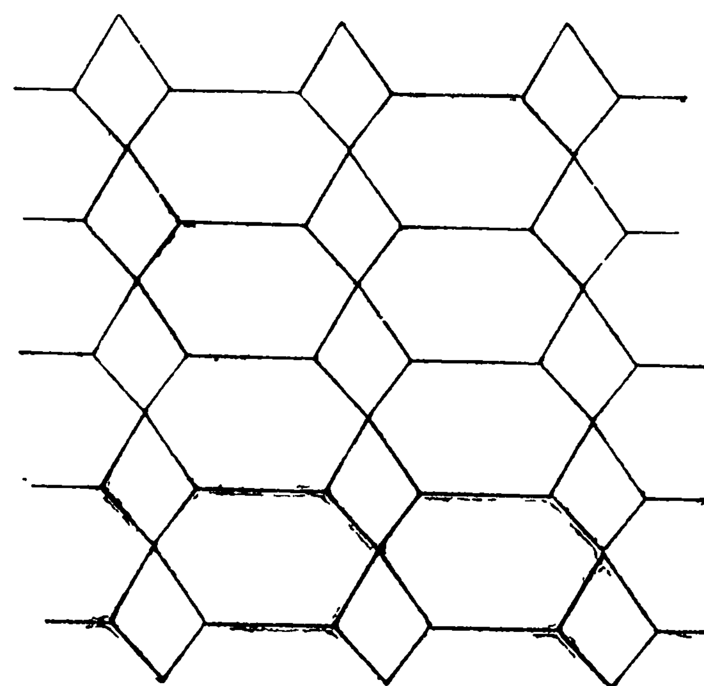
смежного β-параллелогона проходить через b или через c, при другой из этих точек β-фигура должна иметь вогнутый угол; через обе же точки зараз параллельные стороны β-параллелогона проходить не могут, так как тогда промежуток ряда β-фигур, заключающегося между двумя параллельными рядами

α-фигур, был бы меньше, чем промежуток ряда α-фигур в том же направлении, а это невозможно.

На основании этого мы заключаем, что существуют лишь следующие системы выпуклых рядовых параллелогонов: 1) обе фигуры шестиугольники (фиг. 93) или 2) обе пятиугольники (фиг. 94), или 3) обе четырехугольники (фиг. 95), или, наконец, в частном случае, если параллельные стороны одной из фигур сокращаются до нуля, то 4) одна фигура шести-,



Фиг. 95.



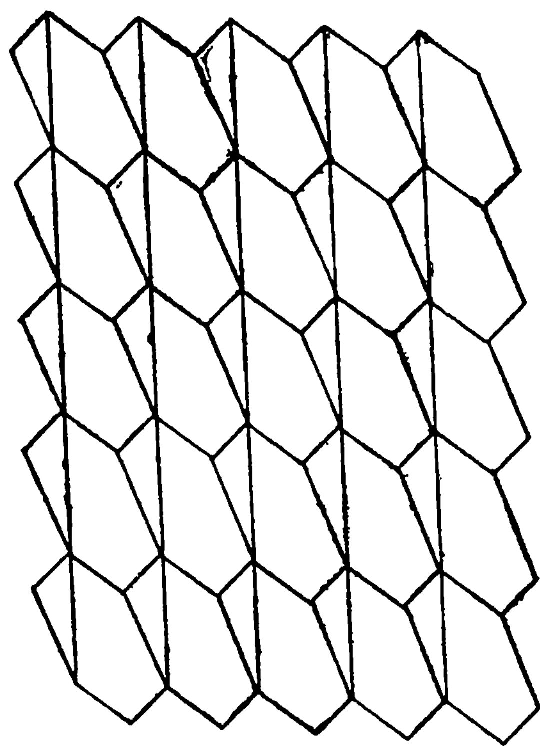
Фиг. 96.

а другая — четырехугольник (фиг. 96), или 5) одна пяти- а другая трехугольник (фиг. 97).

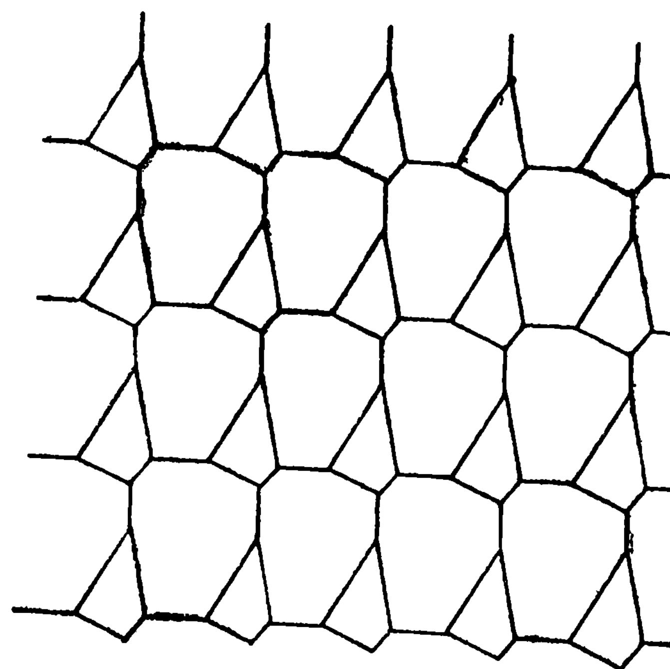
Нетрудно видеть, что, если в обеих фигурах параллельные стороны сокращаются до нуля, то мы приходим к первому случаю, т. е. к системе четырех- или трехугольников, и эти фигуры уже не будут рядовыми параллелогонами.

Наконец, во втором подслучае хоть в одной из фигур, например α, имеется, по приведенным выше соображениям, не менее двух пар равных и обратно параллельных сторон, а потому фигуры эти образуют не менее двух различных рядов, пересекающихся в одной α-фигуре. Совокупность же всех α-фигур, очевидно, образует сомкнутую по рядам сеть, а β-фигуры могут занять лишь изолированное положение. Соответственные точки α-фигур образуют плоскую сетку;

соответственные точки β-фигур образуют сетки, равные и параллельные первой; если вместо точек мы возьмем элементы

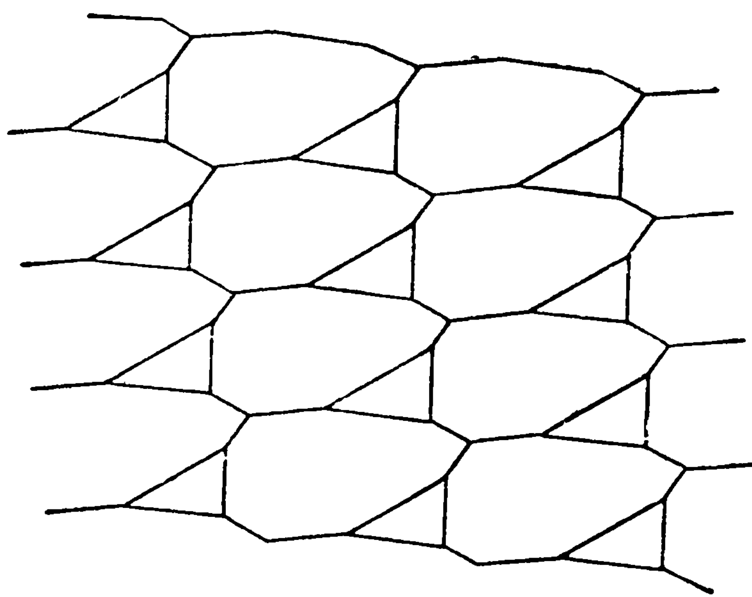


Фиг. 97.



Фиг. 98.

площади, то на такие элементы, входящие в состав β-фигур, мы можем смотреть, как на отнятые от площади α-фигур.



Фиг. 99.

Поэтому, обратно, мы можем получить относящиеся сюда фигуры, отнимая соответственные части параллелогонов первого порядка, и притом, чтобы получить выпуклые фигуры, нужно в системе параллелогонов около соответственных вершин проводить секущие, упирающиеся в каждые две смежные стороны, проходящие через ту же вершину. Из первичных ди- и трипараллелогонов мы получим вообще таким образом две системы фигур, одну из четырех- и восьмиугольников (фиг. 98), а другую из трех- и девятиугольников (фиг. 99), которые можно назвать ди- и трипараллелогоном второго порядка.

Мы ограничимся этим и не будем входить в разбор представляющихся частных случаев.

Растяжения и сдвиги

§ 61. Определение 11. Растяжением плоской фигуры называется такое ее изменение, при котором только одна прямая сохранит свое первоначальное положение; все же другие точки удалятся или приблизятся к этой прямой, называемой осью растяжения, по направлению растяжения на величину, прямо пропорциональную их расстояниям от оси.

Примечание. Величина, на которую передвинутся точки, удаленные от оси на расстояние, равное единице, или, что все равно, отношение расстояний от оси точек после и до растяжения, служит мерою растяжения. Ясно, что если эта величина равна единице, то фигура не подвергается никакому изменению; если величина эта больше единицы, то произойдет собственно так называемое положительное растяжение; если же величина эта меньше единицы, то произойдет сжатие, которое условно мы можем называть отрицательным растяжением. Величину растяжения мы можем поэтому представить в форме l^{μ}, где e — какое-нибудь постоянное число, а μ также может служить мерою растяжения и выражать его знак.

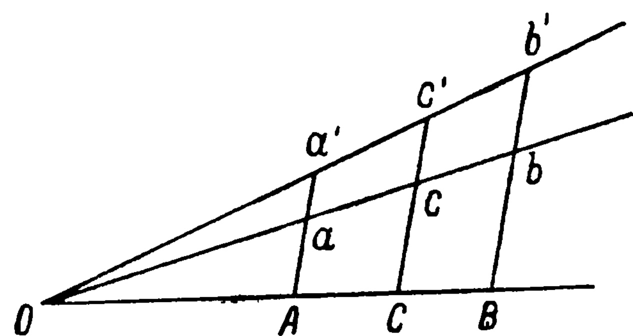
Теорема 9. *Прямые до растяжения остаются прямыми и после растяжения; параллельные до растяжения остаются параллельными и после растяжения.*

Пусть AB — ось растяжения (фиг. 100), а направление Aa — направление растяжения; рассмотрим, что произойдет с прямою ab после растяжения. Если после растяжения точки a, b и какая-нибудь точка c займут положение a', b' и c', то получаем $\frac{a'A}{aA}=\frac{b'B}{bB}=\frac{c'C}{cC}$, так как a, c и b находятся на прямой, то из этого равенства заключаем, что на прямой же будут находиться и точки a', c' и b', т. е. прямая ab займет положение $a'b'$ и, значит, повернется около точки O на неко-

торый угол, вполне определяемый данными условиями растяжения; при тех же условиях для определения положения какой-нибудь другой прямой, параллельной первой, нам пришлось бы сделать совершенно такое же построение, и, значит, мы получили бы, что прямая повернулась на тот же угол; она осталась бы, поэтому, параллельной первой и после растяжения.

Следствие a. Параллелограм до растяжения остается параллелограмом и после растяжения.

Следствие b. Отсюда следует, что и равенство параллельных отрезков сохраняется после растяжения.



Фиг. 100.

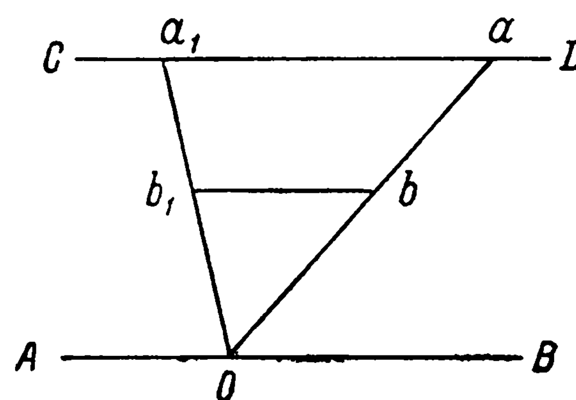
Теорема 10. *Параллелогон до растяжения остается параллелогоном и после растяжения.*

На основании следствий „a“ и „b“ предыдущей теоремы мы заключаем, что система соответственных точек параллелогонов или плоская сетка остается такою же и после растяжения. Если же вместо точки мы возьмем бесконечно малый параллелограм, то система таких соответственных элементов остается и после растяжения системою равных параллелограмов, все соответственные точки которых образуют плоские сетки. Разделив все фигуры системы на соответственные такие параллелограмы, мы найдем фигуры и после растяжения разделенными на соответственные параллелограмы, совокупность которых выполнит собою плоскость в параллельном положении.

§ 62. Определение 12. Сдвигом плоской фигуры называется такое ее изменение, при котором только одна прямая называемая осью сдвига, сохраняет свое первоначальное положение, а все другие прямые, ей параллельные, уклоняются по своему направлению в ту или другую сторону на величины, прямо пропорциональные их расстояниям от оси.

Примечание. Направление оси сдвига есть направление сдвига, а величина уклонения прямой, ей параллельной и находящейся от нее на расстоянии, равном единице, служит мерою сдвига. Если мы припишем оси сдвига, как прямой, определенное направление, то этим самым определим и его знак; сдвиг будет положительным, если уклонение произошло по направлению оси сдвига, и отрицательным — в обратном случае.

Теорема 11. *Прямые до сдвига остаются прямыми и после сдвига; прямые, параллельные до сдвига, остаются параллельными и после сдвига.*



Фиг. 101.

Пусть AB (фиг. 101) — ось сдвига, а CD — прямая, проведенная ей параллельно на расстоянии, равном единице; oa — данная прямая. Отложим величину сдвига aa_1, а через произвольную точку b данной прямой проведем прямую bb_1, параллельную оси, и отложим на ней часть bb_1 такой величины, чтобы $\frac{aa_1}{bb_1} = \frac{ao}{bo}$; ясно, что точка b_1 будет находиться на прямой oa_1, а следовательно, и прямая oa примет после сдвига положение прямой oa_1, т, е. повернется на некоторый угол, вполне определяемый данными условиями сдвига. При тех же условиях для определения положения какой-нибудь другой прямой, параллельной первой, пришлось бы прибегнуть к тому же построению, а потому мы и получили бы в результате поворот на тот же угол.

Следствие a. Параллелограм до сдвига остается параллелограмом и после сдвига.

Следствие b. Отсюда следует, что и равенство параллельных отрезков сохраняется после сдвига.

Теорема 12. *Параллелогон до сдвига остается параллелогоном и после сдвига.*

Мы не останавливаемся здесь над доказательством, так как оно совершенно аналогично данному для теоремы 10.

Следствие. Параллелогон, подвергнутый каким угодно сдвигам и растяжениям, остается параллелогоном, так как таким он остается после каждого отдельного процесса.

§ 63. Теорема 13. *Площадь фигуры, подвергнутой растяжению, увеличивается* (или уменьшается, смотря по знаку растяжения) *на величину растяжения.*

Чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно разделить площадь данной фигуры двумя системами параллельных прямых, а именно по направлению растяжения и по направлению оси растяжения, на бесконечно малые параллелограмы. Если n — величина растяжения, то очевидно, что площадь каждого из этих параллелограмов после растяжения увеличится в n раз, а потому и их сумма увеличится на ту же величину.

Теорема 14. *Площадь фигуры, подвергнутой сдвигу, не изменяется.*

Чтобы убедиться в справедливости этого, достаточно разделить площадь данной фигуры двумя системами параллельных прямых, из которых прямые одной системы параллельны направлению сдвига, на бесконечно малые параллелограмы. Площадь каждого из этих параллелограмов не изменится от сдвига, а потому не изменится и их сумма, т. е. площадь данной фигуры.

Следствие. Площадь фигуры, подвергнутой каким угодно растяжениям и сдвигам, увеличивается на величину произведения величин растяжений.

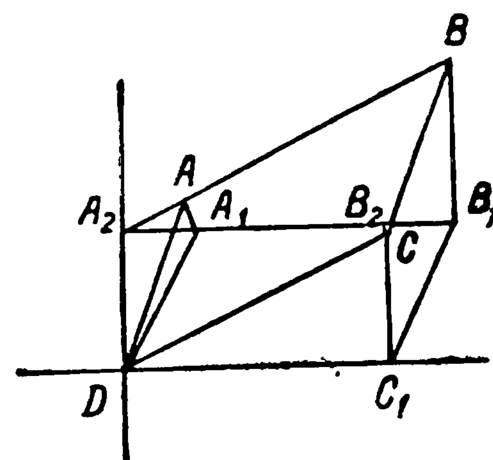
Теорема 15. *Всякий данный параллелограм сдвигами и растяжениями может быть превращен во всякий другой данный.*

Пусть $ABCD$ — один и $abcd$ — другой данный параллелограм, и последний требуется превратить в первый. Чтобы сделать это, растянем параллелограм $abcd$ по направлению ba, приняв bc за ось растяжения, таким образом, чтобы bcd_1a_1 стал равномерен с $ABCD$. Затем, приняв одну из сторон, например, a_1d_1, за ось, подвергнем фигуру сдвигу

на такую величину, чтобы a_1b_1 стала равною AB (что всегда возможно, если выберем так, чтобы $a_1b < a_1d_1$ и $AB > AD$), и, наконец, приняв a_1b_1 за ось, подвергнем полученную фигуру $a_1b_1c_1d_1$ сдвигу на такую величину, чтобы a_1d_2 стала равною AD и $< b_1a_1d_2 = < BAD$. Нетрудно убедиться, что полученный таким образом параллелограм $a_1b_1c_2d_2$ будет равен данному $ABCD$.

Т е о р е м а 16. *Площадь параллелограма равна произведению из отрезка произвольной прямой между двумя параллельными сторонами на проекцию одной из сторон пары на направление, перпендикулярное ко взятой прямой.*

Пусть $ABCD$ (фиг. 102) — данный параллелограм; проведем через D две произвольные взаимно перпендикулярные прямые DC_1 и DA_2. Подвергнем взятую фигуру сдвигу, приняв DA_2 за ось, и на такую величину, чтобы DC приняло положение DC_1; получаем параллелограм $A_1B_1C_1D$, площадь которого равна произведению из стороны DC_1 на высоту или расстояние между сторонами DC_1 и A_1B_1; но высота эта равна отрезку ab,[72] параллельному A_2D между двумя параллельными сторонами AB и DC, а сторона DC_1 есть не что иное, как проекция одной из сторон пары DC на направление DC_1, перпендикулярное к A_2D, а это и требовалось доказать.



Фиг. 102.

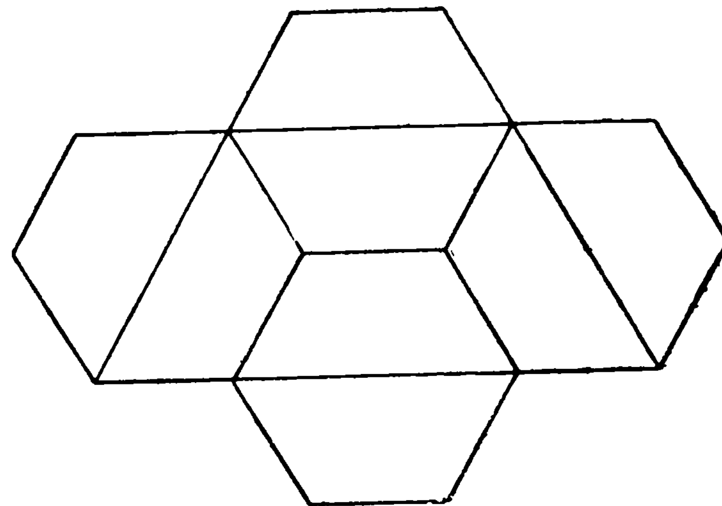
С л е д с т в и е. Если полученный параллелограм $A_1B_1C_1D$ (фиг. 102) подвергнем другому сдвигу, ось которого DC_1, и на такую величину, чтобы DA_1 приняла положение DA_2, то получим равномерный данному прямоугольник $A_2B_2C_1D$. Так как площадь параллелограма меньше квадрата его большей стороны, и так как, беря различные направления, мы можем придать проекциям этих сторон все величины от нуля до величины самой стороны, то отсюда следует, что посредством двух взаимно перпендикулярных сдвигов мы можем пре-

вратить всякий данный параллелограм в прямоугольник, подобный каждому данному, и, между прочим, в квадрат. Теперь положим, что какая-нибудь фигура A подверглась каким-угодно сдвигам и растяжениям и вследствие этого превратилась в фигуру A'. Возьмем на фигуре A четыре точки, которые составили бы квадрат; тогда соответственные точки фигуры A' составят некоторый параллелограм. Растянем квадрат по направлению одной из его сторон, принимая другую за ось растяжения, на такую величину, чтобы площадь образующегося прямоугольника стала равна площади параллелограма фигуры A'. В силу равномерности по только что доказанному, прямоугольник двумя сдвигами, оси которых — стороны самого прямоугольника, мы можем превратить во всякий другой, а следовательно, и в параллелограм A'. Нетрудно убедиться, что в силу сделанного растяжения и двух сдвигов, и сама фигура A превратится в фигуру A'. Другими словами, какие угодно сдвиги и растяжения могут быть замещены одним растяжением и двумя сдвигами по каким-нибудь двум перпендикулярным направлениям. Таким образом, всякая фигура благодаря сдвигам и растяжениям может измениться в другие, число которых — бесконечно большое третьего порядка. Этим условием определяется разнообразие параллелогонов первого и высшего порядка, так как n параллелогонов некоторого порядка n, совокупность которых образует один собственно параллелогон, вследствие каких угодно сдвигов и растяжений превращаются опять в n параллелогонов порядка n.

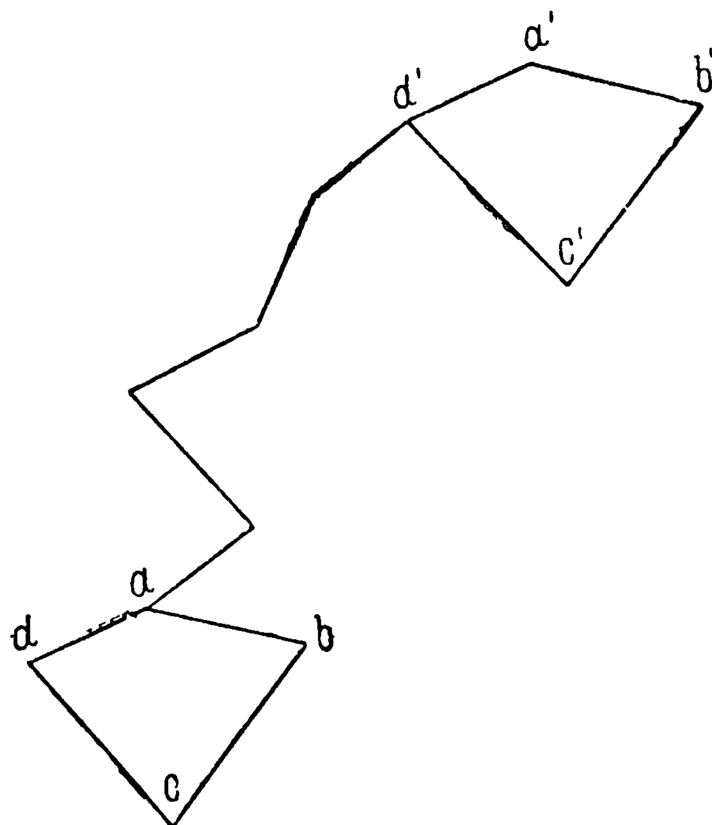
Планигоны

§ 64. Примечание. Мы видели, что при выполнении плоскости параллелогонами, положение одной из фигур вполне определяет собою положение всех смежных. При выполнении плоскости планигонами это условие может и не быть соблюдено, в доказательство чего мы можем

сослаться на фиг. 103; она состоит из выполняющих плоскость равных фигур, но положение одной из них не определяет собою положения всех смежных, так что с одной стороной какой-нибудь фигуры могут совпадать различные стороны другой. Такое незаконосообразное выполнение, очевидно, может иметь место лишь в тех случаях, если в планигоне имеется по несколько равных сторон. Поэтому, если мы выведем условия образования каких угодно планигонов, но выполняющих плоскость по определенному закону, то незаконосообразное выполнение явится возможным лишь в тех частных случаях, когда полученные фигуры будут иметь несколько равных сторон. При выводе же фигур, выполняющих плоскость по определенному закону, нам безразлично, будут ли фигуры собственно равны между собой или симметричны, так как в последнем случае пара таких смежных фигур составит одну, равные которой и выполнят плоскость.



Фиг. 103.



Фиг. 104.

Теорема 17. *Несколько планигонов всегда соединяются в группы, образующие параллелогон.*

Пусть *abcd* — данный планигон (фиг. 104). Докажем сначала, что из неопределенно большого количества выполняю

щих плоскость фигур мы всегда можем выбрать сколько угодно таких, которые находятся в параллельном с ним положении. В самом деле, если бы такого положения вовсе не было, то это значило бы, что все решительно фигуры отличаются друг от друга по положению; но в таком случае из неопределенно большого числа n этих фигур мы могли выбрать такую, которая по положению отличается от данной на угол, меньший всякой данной величины; пусть такая фигура будет $a'b'c'd'$, и, значит, угол между da и $d'a'$ меньше всякого данного. Соединим точки a и d' прямыми, которые образовали бы стороны фигур данной системы; в таком случае, на основании теоремы 1, угол между da и $d'a'$ равен алгебраической сумме углов между всеми сторонами взятой ломаной; но так как составные ее прямые суть стороны данных фигур, то и углы между этими прямыми представляют дополнения до $2d$ одному или сумме нескольких внутренних углов данной фигуры. Так как сумма определенных количеств не может быть сделана меньше всякой данной величины, то, значит, и угол между da и $d'a'$ не может быть бесконечно малый. Следовательно, все фигуры не могут различаться друг от друга по положению, и, значит, самое число положений есть определенное число m. Притом, в силу правильности расположения фигур мы получаем, что если возьмем во всех фигурах, параллельно расположенных, соответственные точки, то получим плоскую сетку, по отношению к которой все другие фигуры в параллельном положении представят собою соответственные элементы площади. Совокупность из m систем таких элементов выполнит собою плоскость, и, значит, каждый такой элемент по величине составит $\frac{1}{m}$ часть параллелограма сетки; из m же таких элементов можно составить парраллелогон, равномерный параллелограму сетки.

П р и м е ч а н и е. Теорема эта дает нам возможность выводить из известных параллелогонов различные плани-

гоны, поскольку параллелогоны эти могут быть разделены на равные фигуры. Ясно, что вообще это будет зависеть от симметрии параллелогонов и что именно наиболее симметричные фигуры могут быть разделены на наибольшее число равных (или симметричных) фигур.

Мы остановимся здесь только на следующем интересном выводе, не зависящем, впрочем, от только что доказанной теоремы, а именно, выводе всех тех планигонов, у которых нет равных сторон, и притом планигонов равных, а не симметричных. Пусть какой-нибудь из этих планигонов имеет n сторон; отметим одну из вершин цифрою 0, и затем все его стороны по часовой стрелке последовательно рядом цифр 1, 2, 3, . . . , n. Так как у каждой фигуры в отдельности нет равных сторон, то, значит, сторона 1 может совпасть лишь со стороною же 1 смежной фигуры, но при этом направление двух совпадающих сторон по необходимости противоположное; поэтому, при вершине 0 расположится угол второй фигуры, имеющий стороны 1 и 2. Прилагая то же рассуждение к этой последней стороне, мы убедимся, что при той же вершине за только что упомянутым углом будет следовать угол третьей фигуры, имеющий стороны 2 и 3, и т. д. до n, и, значит, только тогда, когда около вершины 0 перечередовались все внутренние углы планигона, может произойти выполнение плоскости около этой точки. Но может случиться, что выполнение все-таки еще не произошло; в таком случае необходимо снова повторится тот же полный ряд углов около той же точки; другими словами, сумма внутренних углов такого планигона равна $4d$ или представляет собою делителя этого числа; но так как наименьшая сумма внутренних углов многоугольника есть $2d$, то, значит, возможны лишь 2 таких планигона — четырехугольник и трехугольник с разными сторонами. Нетрудно убедиться, что действительно пара равных трехугольников образует ди-, а пара равных четырехугольников — три-

параллелогон. Эти же фигуры представляют собой и параллелогоны второго порядка, как это мы и видели раньше.

Если плоскость выполняется равными планигонами и внутри всех фигур мы возьмем соответственные точки, то получим систему точек, называющуюся правильной.[1]) Из теоремы 17 следует, что такие системы состоят из совокупности плоских сеток.

Глава 12

ПОЯСА И ЗОНОЭДРЫ

§ 65. Определение 13. Первичным поясом многогранника называется сомкнутый ряд граней, пересекающихся по параллельным ребрам фигуры. Пояса, не удовлетворяющие этому условию, мы будем называть вторичными.[2])

Определение 14. Основным поясом называется один из поясов, принятый за исходный пункт для построения фигуры.

Определение 15. Главным поясом называется всякий пояс, имеющий с основным одну и ту же общую пару граней, называемых основаниями. Все другие грани главных (в том числе и основного) поясов мы будем называть боковыми.

Все пояса, кроме только что упомянутых, мы будем называть побочными. Между ними мы будем различать те, число граней которых равно числу главных поясов, и называть их поперечными; остальные же побочные пояса мы будем называть перекрестными.

Определение 16. Зоноэдром называется такой многогранник, все грани которого слагаются в первичные пояса.

---

[1]) См.: Sohncke. Die regelmässige ebenen Punktsystemen von unbegrenzter Ausdehnung. Borchardt's Journ., т. 77, стр. 47 и сл.

[2]) В дальнейшем, под словом „пояс“ будет всегда подразумеваться парвичный, если прямо не указано противоположное.

Примечание. Ясно, что если в зоноэдре имеются перекрестные пояса, то число их не может быть меньшим чем два, так как в них должны входить грани, не принадлежащие главным поясам, а грань может быть определена не меньше чем двумя парами параллельных сторон; каждая же из этих пар принадлежит некоторому перекрестному поясу.

Теорема 18. *Грани зоноэдра — четноугольники.*

Теорема эта непосредственно вытекает из определения зоноэдра, так как каждая грань последнего должна со смежными, взятыми попарно, образовать пояс, а следовательно, ее стороны будут попарно параллельны друг другу.

Теорема 19. *Все пояса зоноэдра пересекаются в его гранях.*

Полюсы[1]) граней одного и того же пояса находятся на большем круге сферы; два больших круга всегда пересекаются; точки пересечения должны быть полюсами граней, так как, в противном случае, две смежные грани пояса не образовали бы первичных поясов со смежными гранями других поясов, а потому и самая фигура не была бы зоноэдром.

Следствие. Отсюда заключаем, что грани зоноэдра попарно параллельны друг другу, так как два пояса всегда пересекаются по двум параллельным граням; значит, плоские сечения поясов зоноэдра будут четноугольники.

Теорема 20. *Число граней побочного пояса не меньше двойного числа главных поясов.*

Это прямо следует из того, что каждый пояс зоноэдра пересекается со всеми другими, в том числе и главными, поясами и притом в двух гранях.

Следствие. Число ребер, не принадлежащих главным поясам, но принадлежащих граням этих поясов, одно и то же для каждого главного пояса, а именно, число это четверное число всех побочных поясов, так как каждый из этих последних пересекается с главным в четырех ребрах.

[1]) Полюсом грани называется точка пересечения со сферою радиуса-вектора, перпендикулярного к этой грани.

Теорема 21. *Сумма гоноэдров всех видимо однородных зоноэдров есть одна и та же величина, а именно произведение из $2d$ на разность числа вершин и двойного числа поясов.*

Означим число поясов зоноэдра через p, и пусть число граней 1-го, 2-го, ..., m-го пояса будет l_1, l_2, ..., l_m; сумма двугранных углов этих поясов будет соответственно $2d(l_1-2)$, $2d(l_2-2)$, ..., $2d(l_m-2)$, и, следовательно, общая сумма $\Sigma B=\Sigma 2d(l_k-2)=2d\Sigma l_k-4pd$. Ясно, однако, что величина Σl_k есть не что иное, как число ребер или r; следовательно, $\Sigma B=2d(r-2p)$ и $\Sigma G=\Sigma B-2d(f-2)=2d(r-2p-f+2)=$ $=2d(n-2p)$ (по теореме 22 отдела II и формуле Эйлера), где f — число граней и n — число вершин зоноэдра.

Следствие. Если мы сделаем в этой формуле $p=\frac{n}{2}$, то получим $\Sigma G=0$. Следствие это относится к плоским многоугольникам (а именно четноугольникам); поэтому мы можем сказать, что и четноугольник есть зоноэдр с двумя гранями (конечно, равными) и что число его поясов равно половине числа его вершин.

Особое примечание. В последующем, ради простоты формул и краткости, все числа, по необходимости четные, мы заменим их половинами, и, значит, число сторон $2m$-стороннего четноугольника будем принимать за m, число граней пояса вместо $2l$ за l и число граней зоноэдра вместо $2f$ за f. Также, краткости ради, произведение $p(p-1)$, где p — число поясов, будем называть функцией зоноэдра, а $m(m-1)$, где m — число (как всегда половинное) сторон какой-нибудь грани зоноэдра — функцией грани зоноэдра.

Теорема 22. *Функция зоноэдра равна сумме функций его граней.*

Примем какой-нибудь пояс за основной. Мы знаем, что число всех остальных поясов равно половине числа сторон боковых граней, не считая сторон, входящих в состав самого

пояса. Поэтому, если число четырех-, шести-, восьми-... угольников, входящих в состав боковых граней, мы означим через f_2, f_3, f_4, ..., то получим $p-1=1\cdot f_2+2f_3+3f_4+ +\ldots+(n-1)f_n+\ldots$, так как из четырехугольника в счет входит одна, из шестиугольника — две стороны и т. д. Подобные же равенства мы получим и для всех других поясов. Суммирование этих равенств дает $(p-1)p=\Sigma(1f_2+2f_3+ +\ldots+(n-1)f_n+\ldots)$, так как в этой сумме p членов. Но при суммировании происходит повторение величин, и притом ясно, что каждая грань повторяется столько раз, для скольких поясов она служит общей гранью, т. е. $2n$-угольник повторяется в этой сумме n раз; это же число представляет собою знак при величине f. Приняв это во внимание, мы получим окончательно $(p-1)p=1\cdot 2f_2+2\cdot 3f_3+\ldots+ +(n-1)nf_n+\ldots$, что и требовалось вывести.

Примечание. Формулу эту мы также можем применить к плоским фигурам, т. е. зоноэдрам, состоящим из двух граней — четноугольников; если число сторон $2n$, то $(p-1)p=(n-1)n$ или $n=p$, что, впрочем, очевидно.

§ 66. Теперь мы перейдем к выводу важнейших зоноэдров. Так как все грани какого-нибудь многогранника не могут быть многоугольники наименования 6 и выше (§ 24), то, значит, в числе граней зоноэдра обязательно должны быть параллелограмы, а потому и первый член основной зоноэдрической формулы будет всегда действительный.

Самый вывод мы начнем с зоноэдров, все грани которых параллелограмы, и затем перейдем к таким, в число граней которых входят шестиугольники и т. д.

Вывод важнейших зоноэдров, коих все грани параллелограмы

Очевидно, что изоэдрами могут быть только сюда относящиеся зоноэдры. Мы будем называть их изозоноэдрами. Сюда относятся, например, куб, ромбические додекаэдр и триаконтаэдр.

Легко видеть, что грани изозоноэдра могут быть лишь ромбы. В самом деле, допустим, что грани какого-нибудь изозоноэдра не ромбы, а параллелограмы с неравными сторонами a и b. Приняв одну из граней за основание, мы найдем, что ребра поясов основного и главного будут различны, а потому и общие грани этих поясов с каким-нибудь побочным поясом будут различны, так как при одинаковости ребер, принадлежащих самому поясу, другие пары ребер будут a и b, и, значит, неодинаковы, а потому и самая фигура не будет изозоноэдром.

Кроме того, легко доказать, что число граней всех поясов относящихся сюда зоноэдров будет одно и то же. В самом деле, если мы примем сначала один, а потом какой-нибудь другой пояс за основной, то, если бы число граней было различно, то мы получили бы по следствию теоремы 19 различное число поясов для одной и той же фигуры, что нелепо. Число это есть именно $1=\frac{r}{p}=\frac{2f}{p}$; но мы имеем также $(p-1)p=1\cdot 2f_2=f$, а потому

$$p=\frac{1+\sqrt{4f+1}}{2} \quad \text{и} \quad 1=\frac{4f}{1+\sqrt{4f+1}}.$$

Отсюда заключаем, что $4f+1$ должно быть квадратом целого и притом нечетного числа, так как в противном случае p было бы дробью, что невозможно. Таким образом, мы легко получим ряд возможных для f величин, а именно:

$$\frac{3^2-1}{4}=2,\quad \frac{5^2-1}{4}=6,\quad \frac{7^2-1}{4}=12,\quad \frac{9^2-1}{4}=20,\quad \frac{11^2-1}{4}=30$$

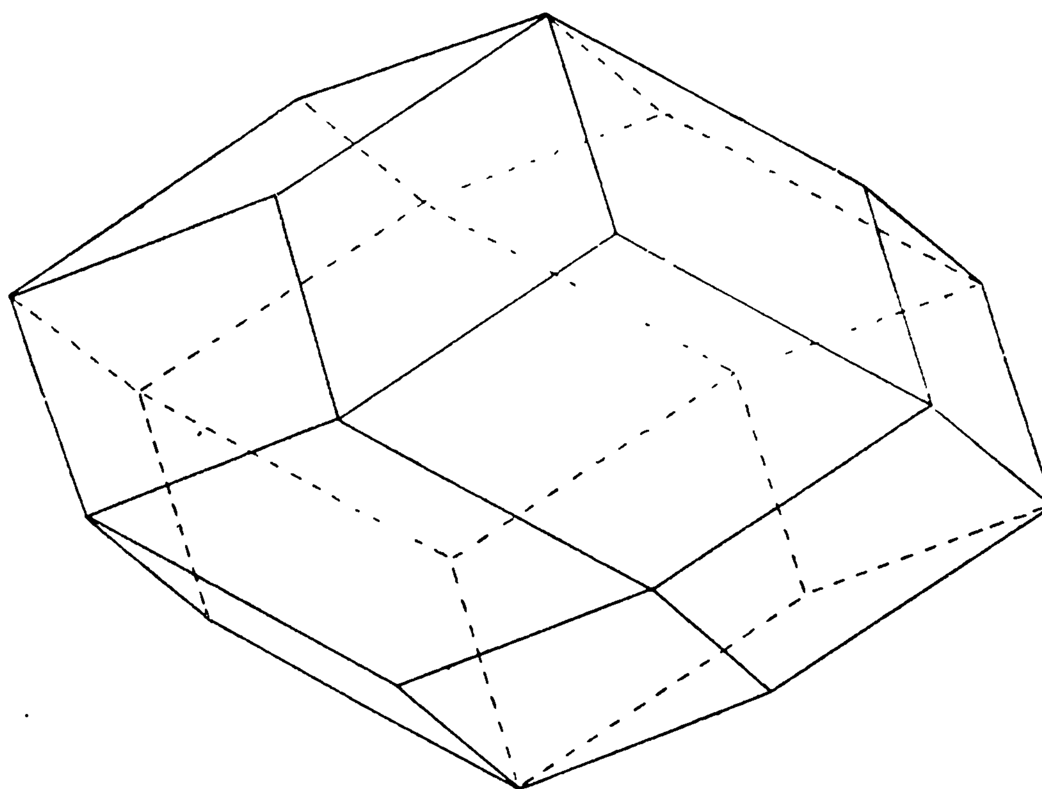
и т. д. Однако, тот же ряд мы в другой форме получим и прямо из основной формулы $(p-1)p=1\cdot 2f_2$, а именно, так как $f_2=\frac{f}{2}$, то $f=(p-1)p$, и потому получим ряд

$$1\cdot 2=2,\quad 2\cdot 3=6,\quad 3\cdot 4=12,\quad 4\cdot 5=20,\quad 5\cdot 6=30$$

и т. д. Итак, ряд чисел, выражающих собою число граней относящихся сюда зоноэдров, есть ряд трехугольных чисел

и находится в тесной связи с арифметическою прогрессиею второго порядка натуральных нечетных чисел.

Первый член этого ряда относится не собственно к зоноэдру, а к параллелограму, рассматриваемому как зоноэдр. Второй, третий и пятый члены общеизвестны в виде представителей — куба, ромбических додекаэдра и триаконтаэдра, которые представляют собою изозоноэдры и притом типические. Однако четвертый промежуточный член, а именно,

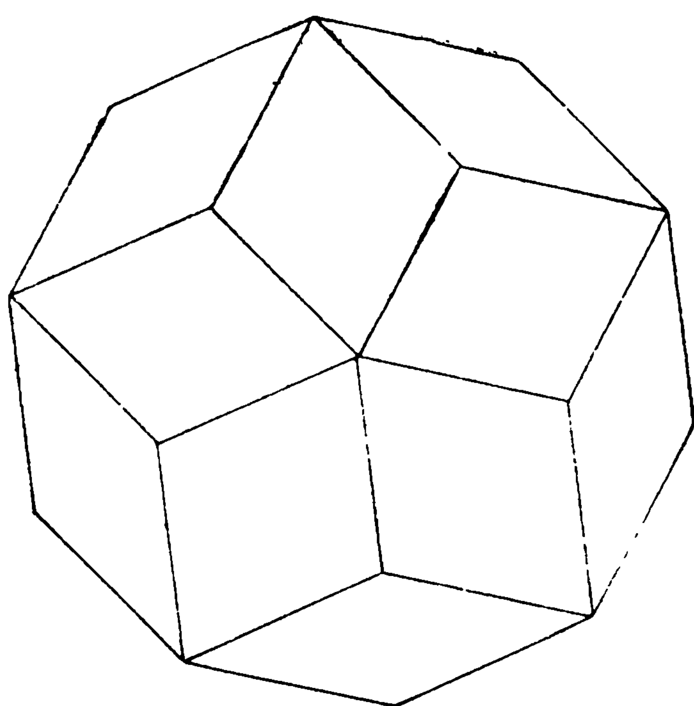


Фиг. 105.

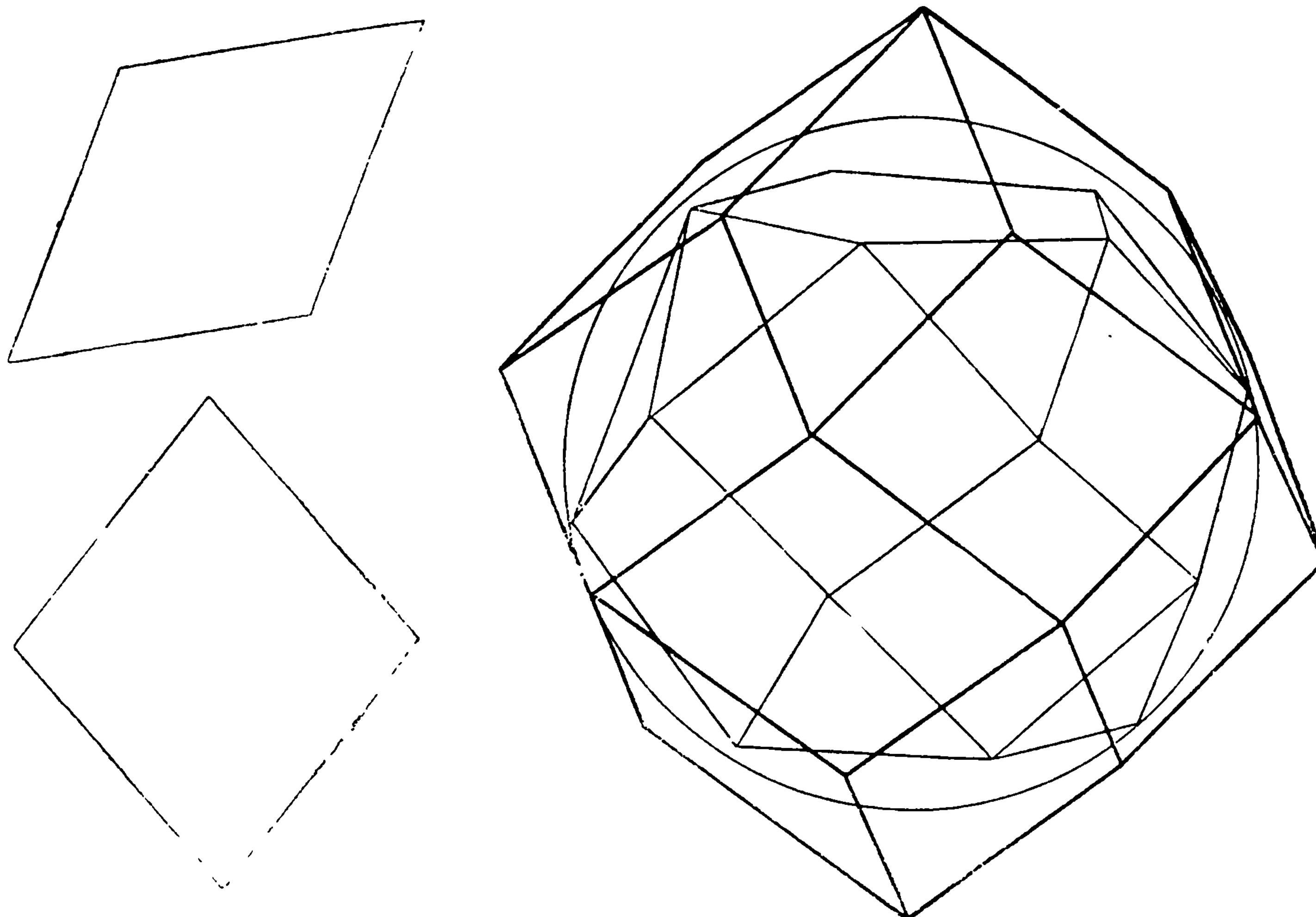
ромбический икосаэдр (фиг. 105), повидимому, еще не известен. Легко определить, что эта фигура имеет 22 вершины, 40 равных ребер; число его поясов равно 5, и сами пояса восьмигранные.

Легко видеть, что фигура эта заключает в себе четыре слоя граней, и в каждом слое пять граней. Нетрудно видеть также, что фигура эта может обладать пятерною осью симметрии. Из проекции ее на плоскость, перпендикулярную к оси (фиг. 106), видно, что положение одной из вершин, ближайших к оси, вполне определяет собою всю проекцию. Легко видеть также, что фигуру эту можно подвергать растяжению вдоль оси, и чрез это получим серию ромбических икосаэдров, обладающих той же

осью симметрии. В этой серии обращают на себя внимание два особых члена, изозоноэдр (фиг. 105) и типическая фигура (фиг. 107), но обе эти фигуры различны, так как нам уже известно, что типического изоэдра — ромбического икосаэдра — не существует.


Фиг. 106.

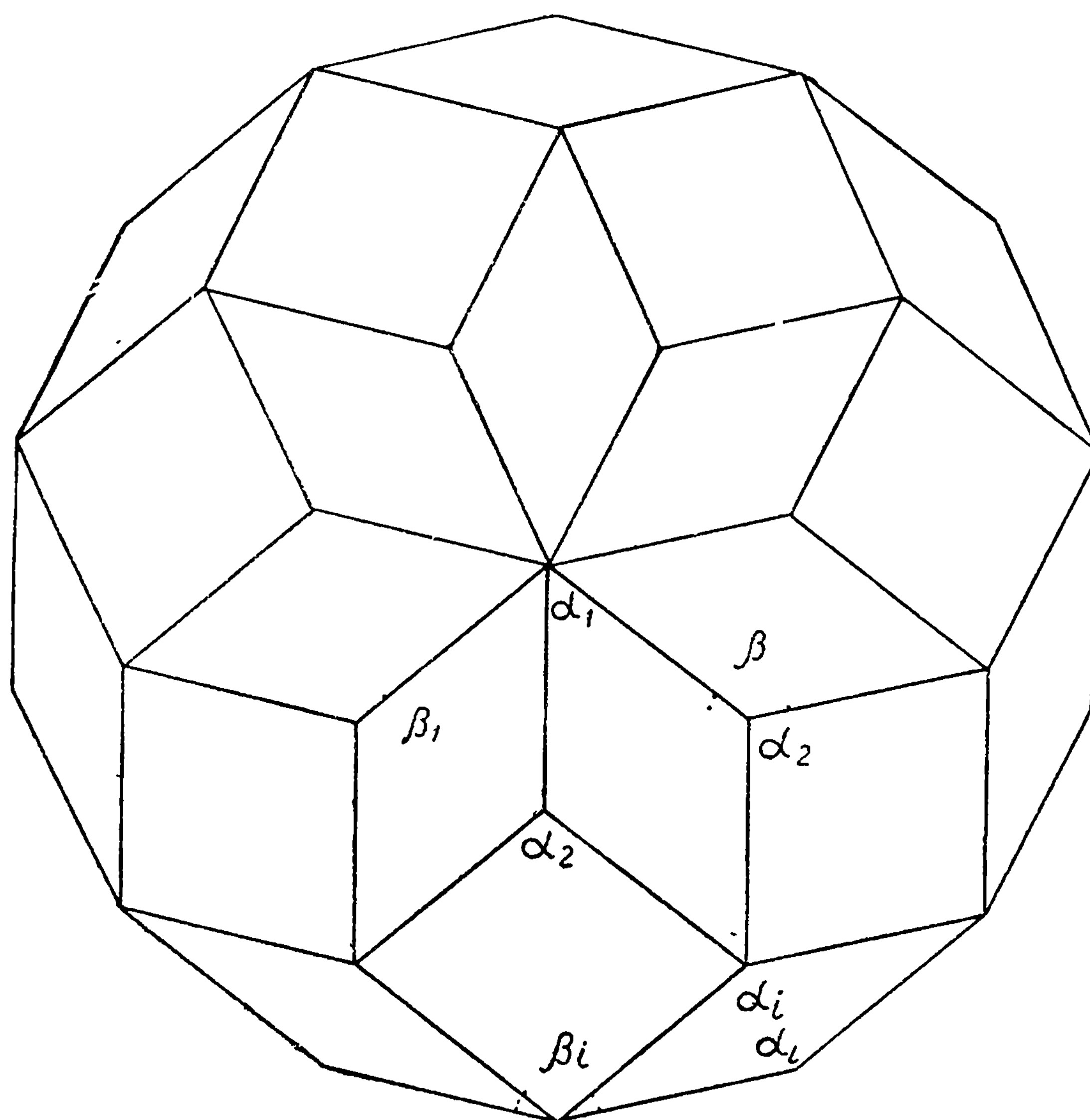
В серии ромбических икосаэдров мы замечаем то интересное обстоятельство, что число граней одного слоя равно числу поясов p, а число слоев $p-1$. Мы сейчас увидим, что то же свойство принадлежит и бесконечному ряду зоноэдров, из которого известны два первые члена — ромбоэдр (его функция $2 \cdot 3$) и ромбический додекаэдр (функция $3 \cdot 4$);


Фиг. 107.

однако ромбический триаконтаэдр не принадлежит этому ряду. Для доказательства достаточно ограничиться проекцией, так

как по проекции мы всегда можем воспроизвести серию фигур.

Будем называть члены этого ряда фигур по числу граней слоя, так что ромбоэдр будет по этой номенклатуре тригональным, ромбический додекаэдр — тетрагональным, а ромбический икосаэдр — пентагональным зоноэдром, и иссле-



Фиг. 108.

дуем главнейшие свойства проекции n-гонального зоноэдра (фиг. 108). Угол α_1 очевидно равен $\frac{4d}{n}$, а

$$\alpha_2 = 4d - 2(2d - \alpha_1) = 2\alpha_1;\ \alpha_3 = 4d - \alpha_1 - 2(2d - \alpha_2) = 3\alpha_1, \ldots;$$

если положим $\alpha_l = l\alpha_1$, то $\alpha_{l+1} = 4d - \alpha_{l-1} - 2(2d - \alpha_l) = 4d - (l-1)\alpha_1 - 2(2d - l\alpha_1) = (l+1)\alpha_1$, что вполне обобщает наш вывод.

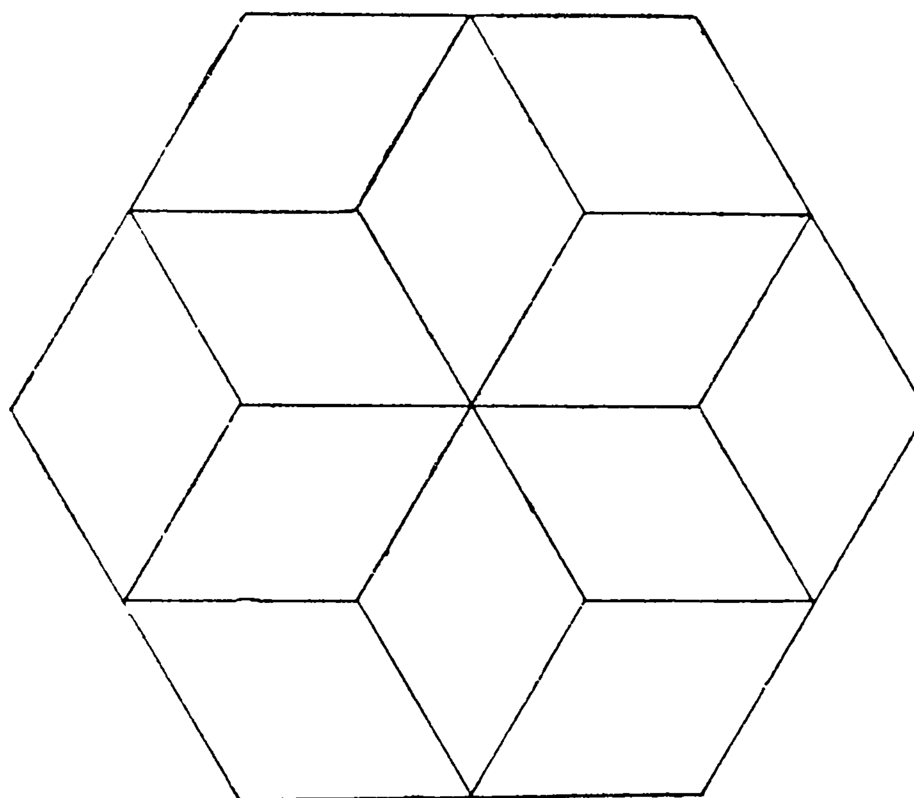
Кроме этих углов, мы отличаем в проекции еще углы β, а именно $\beta_l = 4d - \alpha_{l+1} = 4d\frac{n-l-1}{n}$; значит, величины этих

углов убывают с возрастанием l. Для обвода проекции ни один из этих углов не может быть больше $2d$, и притом α_i всегда должен быть менее $2d$, а β_i может быть и равен этому углу; таким образом $\alpha_i = \frac{i4d}{n} < 2d$ или $2i < n$, и $\beta_i = 4d\frac{n-i-1}{n} \leqslant 2d$ или $2i \geqslant n-2$; следовательно, $\frac{n}{2} > i \geqslant \frac{n}{2} - 1$. Поэтому для внешнего обвода i может иметь лишь две величины: a) $i = \frac{n-1}{}$ и b) $i = \frac{n-2}{2}$. Ясно, что первый случай относится к нечетным, а второй — к четным величинам n. В обоих случаях n есть число граней одного слоя. Но в первом случае i есть половина числа слоев; поэтому $2in = (n-1)n = f = (p-1)p$; следовательно, $p = n$, т. е. число поясов равно числу граней в слое, а число слоев равно тому же числу без единицы. Во втором случае ($\beta = 2d$) имеется вторичный пояс, проектирующийся в самом внешнем обводе, и его грани параллельны оси симметрии; в этом случае число слоев $2i+1$, т. е. опять $n-1$, а потому p опять равно n. Этим доказывается существование ряда полигональных зоноэдров, имеющих функцию $n(n-1)$.

Теперь найдем изозоноэдры этого ряда. Очевидно, что все тригональные изоэдры, т. е. ромбоэдры, представляют собою изозоноэдры, и притом типические. Из серии тетрагональных зоноэдров имеется лишь один изозоноэдр, и опять типический — ромбический додекаэдр. Ясно, что при растяжении этой фигуры вдоль оси грани будут изменяться и притом различно для различных слоев. В серии пентагональных зоноэдров существует, как мы уже видели, лишь один изозоноэдр — ромбический икосаэдр, но уже не типический. Теперь докажем, что все следующие зоноэдры ряда не содержат более изозоноэдров. Для гексагональных фигур мы получаем равенство проекций граней (фиг. 109), так как проекции эти будут ромбы с углами в 120 и 60°; но так как наклонение граней различных слоев к плоскости проекции

различно, а именно, для верхнего слоя меньше, чем для следующего, то отсюда заключаем, что грани верхнего слоя меньше, чем следующего.

Для следующих членов ряда зоноэдров (т. е. когда $n > 6$) мы получаем $\alpha_1 = \frac{4d}{n} < \frac{2}{3}d$, $\alpha_2 = 2\alpha_1 < \frac{4}{3}d$, а потому $d - \alpha_1 > \frac{1}{3}d$ и $\alpha_2 - d < \frac{1}{3}d$, и, значит, величины углов ромбов второго слоя в проекции ближе к d, чем углов первого слоя, а потому и площади ромбов второго слоя больше, чем первого; поэтому a fortiori площади самих граней второго слоя будут больше, чем первого.



Фиг. 109.

В случае $\alpha_2 < d$ мы имеем во всяком случае $d - \alpha_2 = d - 2\alpha_1 < d - \alpha_1$; значит, и в этом случае имеет место то же соотношение.

§ 67. Но, кроме только что описанного ряда зоноэдров, можно представить себе другой ряд, а именно, для случая, когда n — нечетное число. В этом случае, как мы видели, число слоев четное, и самая поверхность зоноэдра состоит из двух равных половин, в каждой из которых находится i слоев. Теперь представим себе, что мы переместили обе эти половины в разные стороны вдоль оси на величину r; при этом не происходит никакого изменения проекции; но если мы свяжем обе половины поясом, ребра которого, длиною равные r, проектировались в вершинах обвода проекции, то мы снова получим зоноэдр, который, для отличия от раньше описанных, мы будем называть зоноэдром второго рода. Таким образом, в зоноэдрах второго рода заключается

всегда нечетное число слоев, и притом средний пояс, ось которого параллельна оси симметрии, содержит в себе вдвое большее число граней, чем остальные слои. Нетрудно видеть, что зоноэдров второго рода также существует бесконечный ряд; но для них равенство $n=p$ не имеет места, так как число граней в них не $n(n-1)$, а $n(n-1)+2n=n(n+1)$, откуда $p=n+1$.

Первый член этого ряда ($n=3$) содержит 12 граней и, очевидно, есть нечто иное, как ромбический додекаэдр, представляющийся только в ином положении, а именно за ось нужно принять в этом случае тригональную. Фигура эта представляет собою типический изозоноэдр. Второй член есть нечто иное, как ромбический триаконтаэдр, т. е. снова типический изозоноэдр; остальные же члены вовсе не содержат в себе изозоноэдров, как это следует из приведенного выше доказательства.

Все найденное нами относительно зоноэдров с четырехугольными гранями мы можем сопоставить в следующей таблице [см. стр. 267].

Вывод важнейших зоноэдров с различными гранями

§ 68. Мы начнем этот вывод с фигур, которые, кроме параллелограмов, содержат еще шестиугольники, и притом сначала предположим существование лишь одной пары шестиугольных граней. Ясно, что для этого случая основная формула принимает вид $(p-1)p=f+6$, где f число четырехугольных граней. Из нее выводим $p=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f+6}=$ $=\frac{1+\sqrt{4f+25}}{2}$; перед корнем мы ставим здесь плюс, так как в противном случае p вышло бы отрицательным, что невозможно. Из этого выражения видим, что $4f+25$ должно быть квадратом целого (и притом нечетного) числа; если означим этот квадрат через a^2, то получим $f=\frac{a^2-25}{4}=\frac{(a+5)(a-5)}{4}$,

Зоноэдры первого рода				Зоноэдры второго рода		
функция зоноэдра	число слоев	число граней в одном слое	серия фигур	функция зоноэдра	число слоев	серия фигур
			Тригональные			Тригональные
2 · 3	2	3	Все члены — типические изозоноэдры — ромбоэдры.	3 · 4	3	Имеется лишь один и притом типический изозоноэдр — ромбический додекаэдр.
			Тетрагональные			
3 · 4	3	4	Имеется лишь один типический изозоноэдр — ромбический додекаэдр.			—
			Пентагональные			Пентагональные
4 · 5	4	5	Имеется лишь один изозоноэдр, но не типический — ромбический икосаэдр.	5 · 6	5	Имеется лишь один и притом типический изозоноэдр — ромбический триаконтаэдр.
			Гексагональные			
5 · 6	5	6	Нет изозоноэдров.			—
			Гептагональные			Гептагональные
6 · 7	6	7	Нет изозоноэдров.	7 · 8	7	Нет изозоноэдров.

а это показывает, что если только a есть нечетное число, большее чем 5, то из него всегда получим возможную величину и для f. Наименьшее значение есть $a = 7$; а потому величины f составят следующий ряд: $6 = 2 \cdot 3, 14 = 2(3 + 4)$, $24 = 2(3 + 4 + 5)$, $36 = 2(3 + 4 + 5 + 6)\ldots$

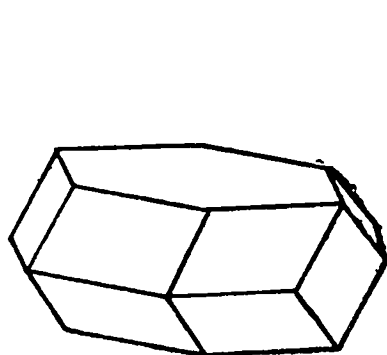
Первая, сюда относящаяся, фигура есть гексагональная призма. Вторая изображена на фиг. 110.

Для зоноэдров с двумя парами шестиугольных граней основная формула принимает вид $(p-1)p=f+12$, откуда

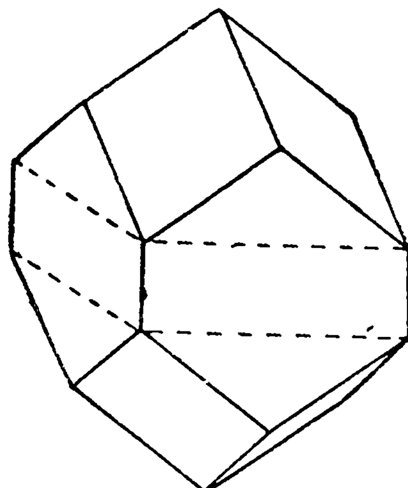
$$p=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f+12}=\frac{1+\sqrt{4f+49}}{2}.$$

$4f+49$ должно быть квадратом целого (нечетного) числа, и мы для f получаем ряд: $8=2\cdot 4$, $18=2(4+5)$, $30=(4+5+6)$, $44=2(4+5+6+7)\ldots$

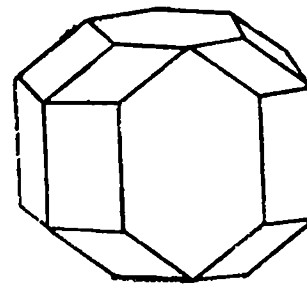
Первая фигура (фиг. 111) есть не что иное, как видоизменение ромбического додекаэдра, происходящее из него путем



Фиг. 110.



Фиг. 111.



Фиг. 112.

удлинения вторичного пояса, ось которого параллельна оси симметрии; при этом ромбы этого пояса превращаются в шестиугольники, а сам пояс — в первичный. Фигуру эту мы назовем удлиненным ромбическим додекаэдром. Вторая фигура этого ряда изображена на фиг. 112.

Для зоноэдров с тремя парами шестиугольных граней основная формула принимает вид $(p-1)p=f+18$, откуда

$$p=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f+18}=\frac{1+\sqrt{4f+73}}{2}.$$

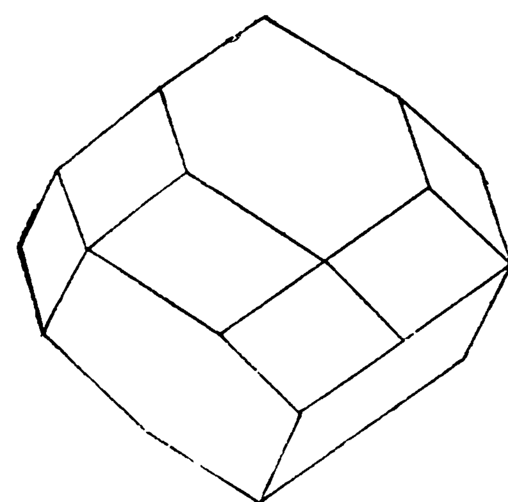
$4f+73$ должно быть квадратом целого (нечетного) числа, и для f мы получаем ряд: $2=2\cdot 1$, $12=2\cdot 6$, $24=2(6+6)$, $38=2(6+6+7)$, $54=2(6+6+7+8)\ldots$

В этом случае является особый первый член, не принадлежащий собственно ряду. Фигура этого случая должна

иметь 3 пары шестиугольников и 1 пару четырехугольников; число его поясов 5, число ребер 22 и число вершин 16; но частное из двойного числа ребер на число вершин есть не что иное, как среднее наименование гоноэдров какого-нибудь многогранника. Для этого случая число это $2\frac{3}{4}$, т. е. меньшее чем 3, а это невозможно. Поэтому первого члена этого ряда и вовсе не существует. Фигура второго случая изображена на фиг. 113.

Для зоноэдров с четырьмя парами шестиугольных граней основная формула принимает вид $(p-1)p=f+24$, откуда

$$p=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f+24}=\frac{1+\sqrt{4f+97}}{2}.$$



Фиг. 113.

$4f+97$ должно быть квадратом целого (нечетного) числа, и для f мы получаем ряд: $6=2\cdot 3$, $18=2(3+6)$, $32=2(3+6+7)$, $48=2(3+6+7+8)\ldots$

Первый член этого ряда есть не что иное, как притупленный октаэдр.

Для зоноэдров с пятью парами шестиугольных граней основная формула принимает вид $(p-1)p=f+30$, откуда

$$p=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f+30}=\frac{1+\sqrt{4f+121}}{2}.$$

$4f+121$ должно быть квадратом целого (нечетного) числа, и для f мы получаем ряд: $12=2\cdot 6$, $26=2(6+7)$, $42=2(6+7+8)$, $60=2(6+7+8+9)\ldots$

Мы ограничимся этим выводом и лишь в виде примеров рассмотрим некоторые общие решения.

Если возьмем $f=2m$, то получим для каждой величины m равенство $(p-1)p=f+(m-1)m=2m+(m-1)m=m(m+1)$, отсюда $p=m+1$. Нетрудно видеть, что реше-

ние это относится к призмам с основаниями — четноугольниками.

Если возьмем $f=2(2m+1)$, то получим $(p-1)p = 2(2m+1)+(m-1)m=(m+1)(m+2)$; отсюда $p=m+2$. Этот новый ряд зоноэдров с основаниями — четноугольниками какого-угодно наименования своим первым членом имеет ромбический додекаэдр, и в этом случае основания четырехугольные. Второй член этого ряда также был получен уже нами и изображен на фиг. 110.

Можно принять $p=m+3$, и тогда $(p-1)p = (m+2)(m+3)=f+(m-1)m$, откуда $f=6(m+1)$. Первый член этого ряда $(m=2)$ имеет 18 граней — четырехугольников и еще два четырехугольных основания, и, значит, всего 20 граней, и есть не что иное, как ромбический икосаэдр.

Вообще мы можем принять $p=m+k$, откуда $(p-1)p = (m+k-1)(m+k)=f+(m-1)m$, и $f=k(2m+k-1)$. Первый член этого ряда всегда будет полигональным зоноэдром, а именно при $m=2$ мы получаем $f=k(k+3)$ и еще пару основных граней, т. е. всего $k(k+3)+2=(k+1)(k+2)$, и, значит, первый член будет не что иное, как $(k+2)$-гональный зоноэдр 1-го рода; если же число k четное, то он может быть и полигональным зоноэдром 2-го рода. Отсюда заключаем, что на все полигональные зоноэдры можно смотреть, как на первые члены бесконечных рядов с парами оснований — четноугольников какого угодно наименования.

Мы заключим все эти соображения рядом зоноэдров, обладающих средним слоем (поясом), состоящим из $2n$ шестиугольников, т. е. рядом удлиненных полигональных зоноэдров, имеющих четное число граней в слое. Мы получаем $p(p-1)=\{(2n-1)2n-2n\}+6n=2n(2n+1)$, значит $p = 2n+1$, т. е. при том же числе граней число поясов этих фигур на единицу больше, чем у полигональных зоноэдров, из которых они произведены.

§ 69. Определение 17. Парногранником называется многогранник, имеющий грани попарно равные и параллельные (всё равно, прямо или обратно).

Теорема 23. *Выпуклый парногранник имеет центр.*

Если грани a равна и обратно параллельна a', смежной с ней грани b равна и обратно параллельна смежная же грань b' и т. д., то все прямые, стягивающие соответственные вершины, пересекутся в одной точке — центре. Если же центра не имеется, то последовательность соответственных граней не может быть одинакова. Пусть грани a соответствует равная и параллельная ей a', а смежной с a грани b соответствует b', не смежная с a'. Как в a', так и в b' должно заключаться по стороне, равной и параллельной общему ребру граней a и b. Если с гранью a' по этому ребру смежна грань c', а грани b' — d', то, проведя через все эти грани вторичный пояс, мы получим, что в нем необходимо должны находиться и грани c и d, соответственные c' и d'. На основании же соображения, подобного тому, которое приведено для доказательства теоремы 3, мы увидим невозможность сделанного допущения, чем и докажется существование центра.

Определение 18. Равнореберным зоноэдром называется зоноэдр, пояса которого имеют равные ребра.

Следствие. Из этого определения вытекает, что равнореберный зоноэдр есть парногранник, а его грани — парносторонники.

Теорема 24. *Если существует какой-нибудь выпуклый зоноэдр, то существуют и его равнореберные отличия.*

Грани данного зоноэдра — четноугольники. Нетрудно построить равносторонники, составляющие разновидность этих четноугольников, стороны которых имеют произвольную длину r. Для этого достаточно строить последовательно углы данных четноугольников в том же порядке, как это имеет место у самих фигур, и всякий раз на вновь проведен-

ной прямой отложить величину *r*. Построив таким образом половину равносторонника, остается стянуть концы полученной ломаной прямой и, приняв ее середину за центр, построить остальную половину.

Поступая точно так же с полученными гранями, которые всегда будут смыкаться друг с другом в силу равенства их ребер, а также равенства угловых элементов (плоских углов и гоноэдров) составляющейся таким образом фигуры с соответственными элементами данного зоноэдра, по отношению к которому мы можем параллельно проводить все грани и ребра, мы, очевидно, придем к сомкнутой фигуре, а именно, зоноэдру со всеми равными ребрами. Удлиняя или укорачивая ребра какого угодно пояса полученного зоноэдра, мы можем воспроизвести различные равнореберные разновидности данного.

Определение 19. Плоским поясом называется ряд параллелограммов, все общие стороны которых параллельны между собою.

Примечание. Выпрямив какой-нибудь пояс полигонального зоноэдра, мы получим, следовательно, плоский пояс.

Теорема 25. *Разложение площади какой-нибудь плоской фигуры на параллелограмы может быть произведено лишь при помощи плоских поясов.*

В самом деле, если площадь данной фигуры разделена на параллелограмы, то, исходя из одного из них со сторонами *a* и *b*, мы можем перейти к смежным параллелограмам, имеющим с первым общими эти стороны; от новых параллелограмов мы снова можем перейти к следующим, опять имеющим с предыдущими сторонами равные и параллельные *a* и *b*, и т. д., пока не достигнем предела фигуры, т. е. ее сторон, в числе которых, значит, также должны находиться им же равные и параллельные и притом в двойном числе; ряды же параллелограмов между этими сторонами и составят плоские пояса.

Следствие a. Из хода доказательства этой теоремы мы заключаем, что на параллелограмы может быть разделена только площадь парносторонника.

Следствие b. Из того же мы видим, что число плоских поясов разложенного на параллелограмы парносторонника равно числу пар его сторон.

Теорема 26. *Все плоские пояса выпуклой фигуры, разделенной на параллелограмы, пересекаются друг с другом.*

Так как выпуклый парносторонник имеет центр (теорема 3), то каждый плоский пояс, соединяющий две диаметрально противоположные его стороны, разделяет его периметр на две равные части, так что стороне, находящейся на одной из этих половин, соответствует равная и обратно параллельная ей сторона на другой половине, и, значит, плоский пояс, соединяющий пару таких сторон, пересечет пояс, проведенный раньше.

Особое примечание. Здесь, так же как и при выводе основной зоноэдрической формулы, условимся принимать за единицу два элемента, составляющие пару соответственных элементов.

Теорема 27. *Число параллелограмов, происшедших от разложения площади выпуклого парносторонника плоскими поясами, равно числу сочетаний из числа* (пар) *его сторон по два.*

Это прямо следует из того, что каждые два пояса пересекаются и дают в результате один параллелограм, и из того, что число этих поясов равно числу (пар) сторон фигуры.

Следствие. Из изложенного следует, что, так как все грани равнореберного зоноэдра мы можем разложить на параллелограмы, то за параллелограмы же можем принимать и самые его грани. А так как для каждого зоноэдра мы можем построить равнореберные разновидности, то, следовательно, и грани всех зоноэдров вообще мы можем принимать

за параллелограмы. Зоноэдры, так рассматриваемые, мы будем называть теоретическими и относящиеся к ним элементы отмечать значками. Таким образом, для каждого теоретического зоноэдра мы можем применить простую формулу

$$f'=(p'-1)p', \tag{1}$$

а также и некоторые другие выводы, сделанные для зоноэдров с четырехугольными гранями, а именно формулы

$$l'=\frac{r'}{p'}; \tag{2}$$

$$\Sigma B'=2d(r'-2p')=2dp'(l'-2); \tag{3}$$

$$\Sigma G'=2d(n'-2p'); \tag{4}$$

$$r'=2f'; \tag{5}$$

$$n'=f'+2. \tag{6}$$

В совокупности имеется, значит, шесть равенств, связывающих семь величин, а потому одна из них определяет все остальные. Например, если дана f', то мы получим

$$n'=f'+2,\ \ r'=2f';\ \ p'=\frac{1+\sqrt{4f'+1}}{2};\ \ l'=\frac{4f'}{1+\sqrt{4f'+1}};$$

$$\Sigma B'=2d(2f'-\sqrt{4f'+1}-1)\ \text{и}\ \Sigma G'=2d(f'+1-\sqrt{4f'+1}).$$

Формулу (1) мы можем, впрочем, и прямо вывести из основной зоноэдрической формулы, если примем во внимание теорему 27, а именно, из нее выходит, что

$$f_3=\frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}f_2';\ \ f_4=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}f_2'';\ \ \ldots;\ \ f_n=\frac{1\cdot 2}{(n-1)n}f_2^{(n)}\ldots$$

Поэтому основной зоноэдрической формулы можно придать вид

$$p(p-1)=1\cdot 2(f_2+f_2'+f_2''+\ldots f_2^{(n)}+\ldots)=f'.$$

Мы видим отсюда, что функция действительного и теоретического зоноэдра одна и та же, что, впрочем, видно и непосредственно, так как число поясов их одно и то же.

§ 70. Теперь рассмотрим дуальную зависимость, существующую между зоноэдрами и парногранниками.

Возьмем парногранник с числом $2f$ граней. Каждая пара a его граней с каждой другой образует пояс. Если в этом поясе не находится никаких других граней, то пара a образует $f-1$ четырехгранных поясов. Но может случиться, что в некоторых из этих поясов находятся другие пары граней; в таком случае пояса эти будут высшего наименования. Если грань a образует с другими гранями $p_{2,a}$ четырехгранных, $p_{3,a}$ шестигранных, ..., $p_{n,a}$ $2n$-гранных поясов, то число поясов уже будет меньше чем $f-1$, а именно число это для каждого шестигранного пояса уменьшается на 1, для каждого восьмигранного — на 2, ..., для каждого $2n$-гранного — на $(n-2)$; потому для грани a мы получим ... $f-1=p_{2,a}+$ $+2p_{3,a}+\ldots+(n-1)p_{n,a}+\ldots$ Точно так же для другой грани b

$$f-1=p_{2,b}+2p_{3,b}+\ldots(n-1)p_{n,b}+\ldots$$

Вообще для грани k получим

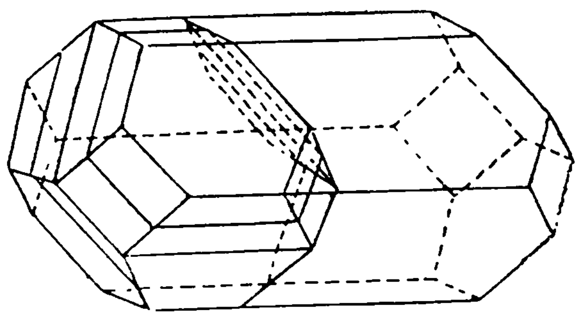
$$f-1=p_{2,k}+2p_{3,k}+\ldots+(n-1)p_{n,k}+\ldots$$

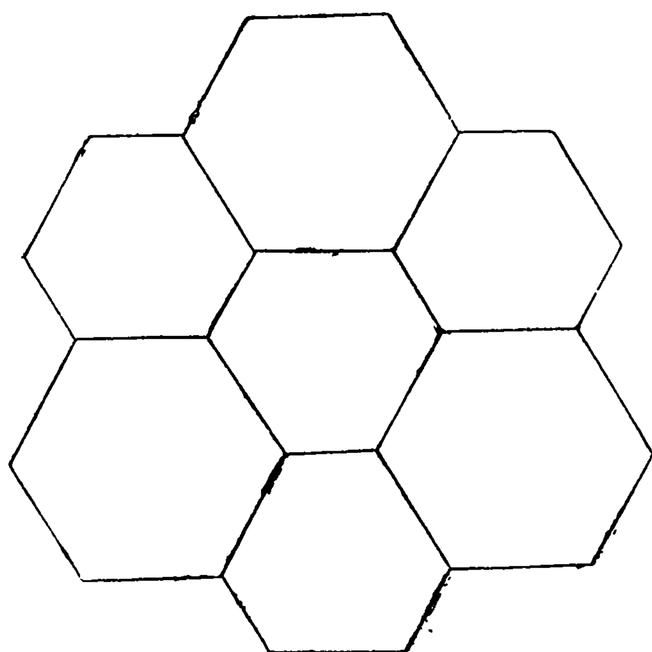
Число этих равенств для всех пар граней f, и при суммировании каждый член $p_{g,h}$ повторяется столько раз, сколько пар граней заключается в соответственном поясе, т. е. g раз. Поэтому

$$(f-1)f=1\cdot 2p_2+2\cdot 3p_3+\ldots+(n-1)np_n+\ldots$$

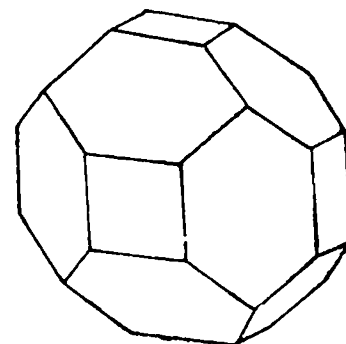
Из этой формулы, совершенно аналогичной основной зоноэдрической, мы заключаем, что каждому зоноэдру соответствует парногранник, число пар граней которого равно числу (первичных) поясов зоноэдра, и каждому его поясу (первичному или вторичному) соответствует пара граней зоноэдра одного наименования с поясом парногранника. Мы будем две такие фигуры называть полярными, а выведенную формулу — основною полярно-зоноэдрическою. Таким

образом, куб как зоноэдр и как парногранник есть фигура полярная себе самой. Каждому парногранику соответствует полярный зоноэдр, но можно взять такую разновидность этого зоноэдра, которая тоже будет парногранником; по отношению к последней фигуре можно опять вывести полярный зоноэдр и т. д. Таким образом, существуют ряды полярных фигур, в которых каждый следующий член, как зоноэдр, есть фигура полярная по отношению к предыдущей, как парнограннику. Если мы примем, например, за первый член такого ряда октаэдр, для которого $3 \cdot 4 = 1 \cdot 2p_2$, т. е. p_2 — число





Фиг. 114.



Фиг. 115.

четырехгранных поясов — равно 6, то для соответствующего ему зоноэдра с четырехугольными гранями получим $(p-1)p = 3 \cdot 4 = 1 \cdot 2f_2$, т. е. он будет иметь шесть пар граней. Ясно, что это будет ромбический додекаэдр. Для последнего как парногранника $(f-1)f = 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2p_2 + 2 \cdot 3p_3 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4$; поэтому для полярного ему зоноэдра получим $(p-1)p = 5 \cdot 6 = 1 \cdot 2f_2 + 2 \cdot 3f_3 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 4$. Фигура эта (фиг. 114) не что иное, как притупленный октаэдр. Для последнего, как парносторонника, имеем $(f-1)f = 6 \cdot 7 = 1 \cdot 2p_2 + 2 \cdot 3p_3 = 2 \cdot 3 + 6 \cdot 6$. Ему должен соответствовать зоноэдр, для которого $(p-1)p = 6 \cdot 7 = 1 \cdot 2f_2 + 2 \cdot 3f_3 =$

$=2\cdot 3+6\cdot 6$. Эта фигура (фиг. 115) есть не что иное, как притупленный ромбический додекаэдр, для которого, как парногранника, снова получаем

$$(f-1)=8\cdot 9=1\cdot 2p_2+2\cdot 3p_3+3\cdot 4p_4=2\cdot 6+6\cdot 4+12\cdot 3;$$

для его полярного зоноэдра имеем

$$(p-1)p=8\cdot 9=1\cdot 2f_2+2\cdot 3f_3+3\cdot 4f_4=2\cdot 6+6\cdot 4+12\cdot 3.$$

Эта фигура есть притупленный кубо-октаэдр, и т. д. Свойства таких рядов те, что 1) число пар граней каждого следующего члена равно числу поясов предыдущего, 2) плоские углы граней следующего равны соответственно двугранным углам предыдущего, 3) число сторон в гранях следующего равно числу граней в соответственных поясах предыдущего.

Все гомоэдрические фигуры, как парногранники, имеют свои полярные зоноэдры, наглядно выражающие зональную структуру первых.

Всем полигональным зоноэдрам, как имеющим четырехугольные грани, соответствуют полярные парногранники с четырехгранными поясами, а именно, как легко определить, полигональным зоноэдрам первого рода соответствуют дельтоэдры нечетного и бипирамиды четного наименования. Так, тригональному зоноэдру первого рода (ромбоэдру) соответствует тригональный дельтоэдр (тоже ромбоэдр), тетрагональному зоноэдру первого рода (ромбическому додекаэдру) — тетрагональная бипирамида (октаэдр), пентагональному зоноэдру первого рода (ромбическому икосаэдру) — пентагональный дельтоэдр, гексагональному зоноэдру первого рода — гексагональная бипирамида, и т. д. Полигональным зоноэдрам второго рода соответствуют призмоиды; так, тригональному зоноэдру второго рода (ромбическому додекаэдру) соответствует тригональный призмоид (октаэдр), пентагональному зоноэдру второго рода (ромбическому триаконтаэдру) — пентагональный призмоид и т. д.

Парногранным призмам соответствуют призмы того же наименования, и при этом может случиться, что одна и та же

призма будет полярною самой себе, например квадратная (куб) призма с основаниями — правильными парносторонниками.

Мы ограничимся этими примерами, достаточно обрисовывающими главнейшие выводы теории зоноэдров.

Растяжения и сдвиги

§ 71. Определение 20. Растяжением телесной фигуры называется такое её изменение, при котором только одна плоскость, называемая плоскостью растяжения, сохранит свое первоначальное положение, а все другие параллельные ей плоскости переместятся в некотором направлении, называемом направлением растяжения, на величины, пропорциональные их расстояниям от плоскости растяжения.

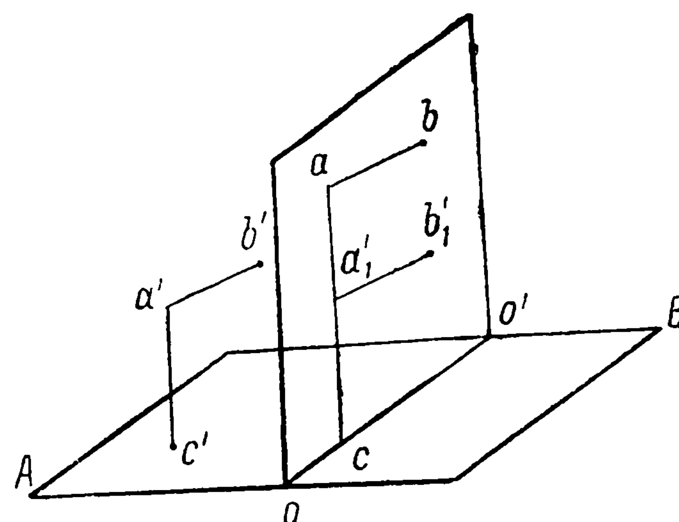
Примечание. Проекция расстояния, на которое передвинется плоскость, находящаяся на расстоянии от плоскости растяжения, равном единице, на перпендикуляр к этой плоскости, служит мерою растяжения. Ясно, что если величина эта равна единице, то фигура не подвергается никакому изменению; если величина эта больше единицы, то произойдет собственно так называемое или положительное растяжение. Если величина эта меньше единицы, то произойдет сжатие, которое мы можем условно назвать отрицательным растяжением. Таким образом, если через r мы назовем расстояние некоторой плоскости от плоскости растяжения до процесса, и mr будет соответственная величина после процесса, то m и будет величиною или коэффициентом растяжения. Мы можем представить эту величину в виде e^{μ}, где e — некоторое постоянное число для всех растяжений; тогда μ по величине и знаку определит величину и знак растяжения.

Теорема 28. *Прямые до растяжения остаются прямыми и после растяжения; прямые, равные и параллельные, остаются такими же и после растяжения.*

Даны прямые, равные и параллельные ab и $a'b'$ (фиг. 116), направление растяжения ca и плоскость растяжения AB.

Первая часть теоремы сводится к аналогичной теореме на плоскости (теорема 9), если через прямую ab и направление растяжения проведем плоскость, которая пересечется с плоскостью растяжения по некоторой прямой oo', и примем последнюю прямую за ось растяжения на плоскости.

Если на прямой ca отложим часть $ca'_1 = c'a'$ и через точку a'_1 проведем прямую $a'_1b'_1$,[73] равную и параллельную данным, то, на основании следствия „b" теоремы 9, прямые ab и $a'b'_1$ останутся равными и параллельными и после растяжения; прямая же $a'b'$ изменится совершенно одинаково с $a'_1b'_1$, так как условия растяжения для обеих совершенно одинаковы.



Фиг. 116.

Следствие a. Плоскость до растяжения остается плоскостью и после растяжения. В самом деле, две параллельные прямые остаются параллельными и после растяжения. Всякая прямая, находящаяся в плоскости этих прямых, остается прямою и будет пересекаться с теми же прямыми в их новом положении, и, следовательно, будет находиться в определяемой ими плоскости, которая, значит, и будет тою, которая произошла из данной от растяжения.

Следствие b. Два равных и параллельных плоских многоугольника остаются равными и параллельными и после растяжения.

Следствие c. Параллелопипед остается параллелопипедом и после растяжения; и это относится к каждому парнограннику.

Следствие d. Зоноэдр остается зоноэдром и после растяжения.

Следствие e. Всякий многогранник, имеющий центр, и после растяжения будет иметь центр, так как на части

диаметра, отделенные центром, можно смотреть, как [на] равные и параллельные отрезки.

Следствие f. Всякий выпуклый многогранник остается выпуклым и после растяжения. В самом деле, выпуклый многогранник находится по одну сторону плоскости, составляющей продолжение одной из его граней; поэтому расстояние точек этой плоскости от плоскости растяжения будет больше или меньше расстояний всех других точек многогранника, взятых на прямых, проведенных через эти точки в направлении растяжения.

§ 72. Определение 21. Сдвигом телесной фигуры называется такое ее изменение, когда неподвижною остается лишь одна плоскость, называемая плоскостью сдвига, а все другие параллельные ей плоскости перемещаются в самих себе по некоторому направлению, называемому направлением сдвига, на величины, прямо пропорциональные их расстояниям от плоскости сдвига.

Примечание. Перемещение плоскости, параллельной плоскости сдвига и находящейся от нее в расстоянии, равном единице, служит мерою сдвига. Из сделанного определения видно, что направление сдвига параллельно плоскости сдвига.

Теорема 29. *Прямые до сдвига остаются прямыми и после сдвига; прямые, равные и параллельные, остаются такими же и после сдвига.*

Эта теорема, так же как и предыдущая сводится к аналогичной теореме на плоскости (теорема 11). Если ab и $a'b'$ (фиг. 116) — две данные равные и параллельные прямые, AB — плоскость сдвига и oo' — направление сдвига, то сдвиг ab произойдет в плоскости, а его ось будет oo'. Отложив по какой-нибудь прямой ca часть $ca'_1 = c'a'$, когда $c'a'$ параллельна ca, и проведя $a'_1b'_1$, параллельно $a'b'$, мы получим для $a'_1b'_1$, очевидно, те же условия изменения, что и для $a'b'$.

Следствие. Нетрудно видеть, что все следствия предыдущей теоремы применимы и в случае сдвига, а потому

они применимы вообще для каких угодно сдвигов и растяжений. Поэтому скольким бы сдвигам и растяжениям мы ни подвергнули данную систему, всегда: a) плоскости остаются плоскостями; b) два равных и параллельных плоских многоугольника остаются равными и параллельными; c) параллелопипед остается параллелопипедом, и это относится к каждому парнограннику; d) зоноэдр остается зоноэдром; e) всякий многогранник, имеющий центр, сохраняет его и после изменения, и f) всякий выпуклый многогранник остается выпуклым.

§ 73. Теорема 30. *Объем телесной фигуры, подвергнутой растяжению, увеличивается на величину растяжения.*

Для доказательства стоит только представить себе данную фигуру разделенною на бесконечно малые параллелопипеды тремя системами параллельных плоскостей, из которых одни параллельны плоскости растяжения, а другие проведены как-нибудь, лишь бы ребра их пересечения были параллельны направлению растяжения. Так как объем каждого элементарного параллелопипеда увеличивается на величину растяжения, то, значит, на ту же величину увеличивается и их сумма, т. е. объем данной фигуры.

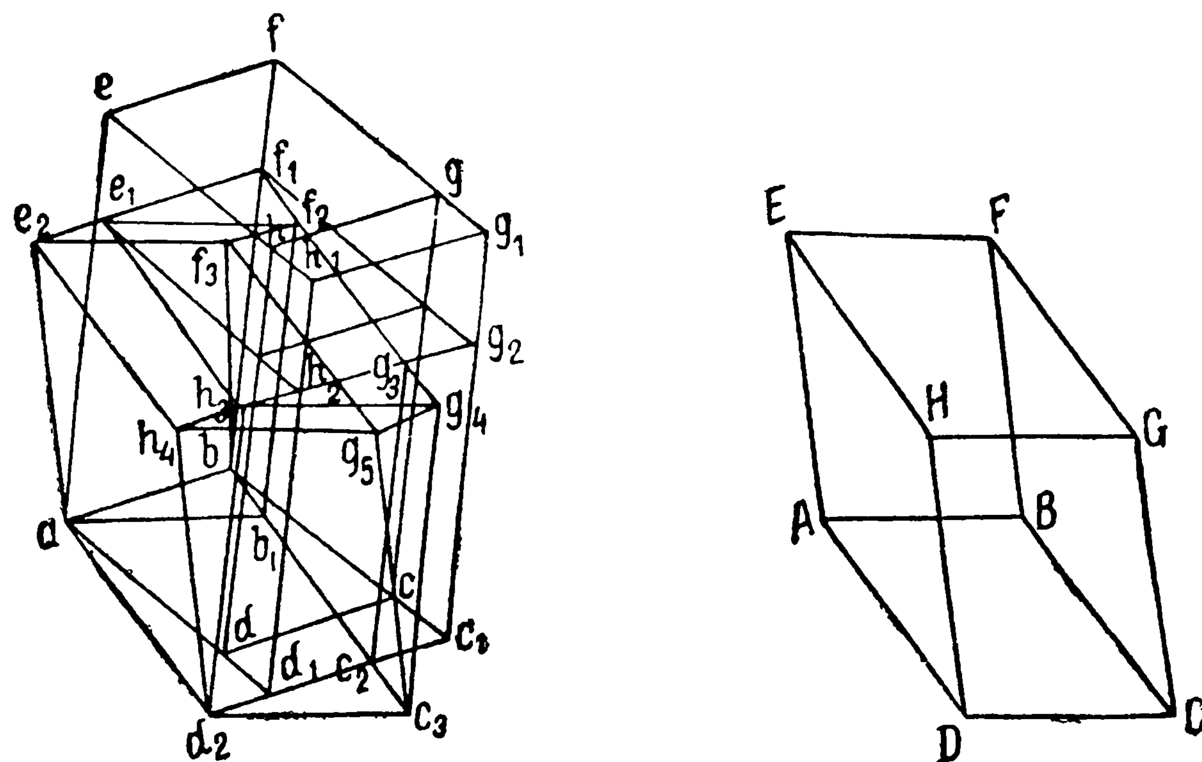
Теорема 31. *Объем телесной фигуры, подвергнутой сдвигу, остается неизменным.*

Разделив фигуру на параллелопипеды тремя системами плоскостей, из которых одна параллельна плоскости сдвига, а одна из двух других систем параллельна направлению сдвига, мы получим, что от сдвига объем каждого элементарного параллелопипеда не изменится, а следовательно, не изменится и сумма этих объемов, т. е. объем данной фигуры.

Следствие. Из двух последних теорем вытекает, что объем фигуры, подвергнутой каким угодно сдвигам и растяжениям, увеличится на величину произведения составных растяжений.

Теорема 32. *Всякий параллелопипед сдвигами и растяжениями можно превратить во всякий другой.*

Пусть $abcdefgh$ и $ABCDEFGH$ — два данных параллелопипеда (фиг. 117); требуется первый превратить в последний. Подвергнем первый растяжению, приняв ad за направление и $aefb$ за плоскость растяжения, на такую величину, чтобы основание его abc_1d_1 стало равномерным основанию $ABCD$; затем приняв abc_1d_1 за плоскость и прямую ae за направление растяжения, растянем его на такую величину, чтобы высота полученной фигуры $abc_1d_1e_1f_1g_2h_2$ стала равна высоте данной.



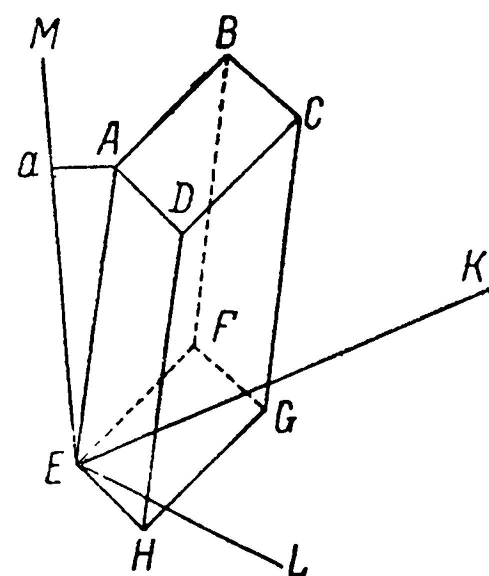
Фиг. 117.

Затем, приняв ae_1f_1b за плоскость и ab за ось сдвига, сдвинем эту фигуру на такую величину, чтобы ребро ad_2 стало равно ребру AD; получаем параллелопипед $abc_2d_2e_1f_1g_3h_3$; далее, приняв $ae_1h_3d_2$ за плоскость и ad_2 за ось сдвига, сдвинем фигуру на такую величину, чтобы ab_1 стала равной AB; получаем параллелопипед $ab_1c_3d_2e_1f_2g_4h_3$, основание которого равно основанию данного. Остается сдвинуть эту фигуру, приняв основание за плоскость сдвига, на такую величину и в таком направлении, чтобы ребро ae_2 составляло с ab_1 и ad_2 углы, равные углам EAB и EAD; это, очевидно, мы можем сделать, проведя прямую ae_2 до пересечения с верхним основанием в точке e_2 таким образом, чтобы она удо-

влетворяла поставленным условиям, и тогда e_1e_2 и определит собою направление и величину требуемого сдвига.

Теорема 33. *Объем параллелопипеда равен произведению из площади сечения одного из его поясов произвольною плоскостью на проекцию ребра этого пояса на перпендикуляр к плоскости сечения.*

Дан параллелопипед *ABCDEFGH* (фиг. 118); рассечем его произвольною плоскостью, через вершину *E* проведем плоскость *KEL*, ей параллельную, и восставим к ней перпендикуляр *EM*. Определив прямую пересечения основания *EFGH* параллелопипеда с плоскостью *KEL* и приняв плоскость, проходящую через эту прямую и прямую *EA*, за плоскость, а *EA* за направление сдвига, мы, очевидно, можем сдвинуть фигуру на такую величину, чтобы основание параллелопипеда совпало с плоскостью *KEL*. Затем, приняв *KEL* за плоскость и некоторую прямую *Aa*, где *a* — точка пересечения прямой *EM* и плоскости, проходящей через точку *A* параллельно плоскости *KEL*, за ось сдвига, сдвинем фигуру на такую величину, чтобы *EA* приняло положение *Ea*. Получится прямой параллелопипед, равномерный данному, но имеющий своим основанием параллелограм сечения данного параллелопипеда с взятою произвольною плоскостью, а своею высотою — проекции ребра *EA* на *EM*, т. е. перпендикуляр к секущей плоскости.



Фиг. 118.

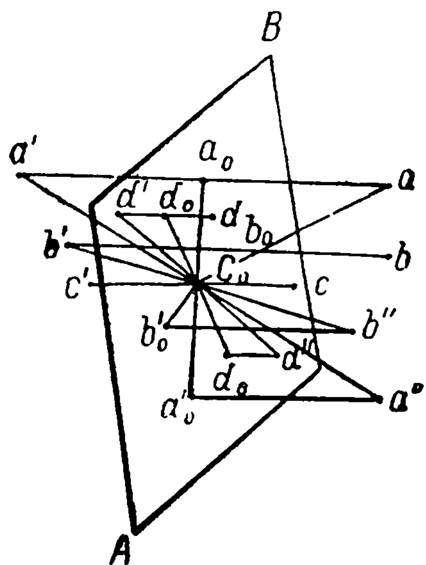
Глава 13

ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 74. Определение 22. Выполнением пространства называется такое сочетание телесных фигур, при котором каждая грань каждой фигуры есть общая двум.

Определение 23. Выполнением в параллельном положении называется такое, при котором выполняющие пространство равные фигуры находятся в параллельном положении.

Примечание. Каждой грани многогранника мы можем приписать внешнюю и внутреннюю сторону и определять это различие по внешней и внутренней сторонам периметра, который получится от сечения многогранника плоскостью. Если, став на внешнюю сторону грани в нормальном к ней положении, мы припишем ее сторонам направление по часовой стрелке, то ясно, что две равные фигуры будут находиться в параллельном положении лишь в том случае, если все грани, а значит, и их ребра, прямо, а не обратно параллельны. Соответственные грани фигур, имеющих центр, будут обратно параллельны и симметричны, а не равны.



Фиг. 119.

Теорема 34. *Две симметричные фигуры можно расположить так, чтобы их соответственные линейные элементы были обратно параллельны.*

Положим, точки a, b, c, d, .., принадлежат одной системе (фиг. 119), а им соответственные точки другой a', b', c', d', ... и пусть плоскость AB — плоскость симметрии обеих систем. В таком случае $aa_0 = a'a_0$, $bb_0 = b'b_0$, $cc_0 = c'c_0$, ..., причем aa', bb', cc', ... — перпендикуляры к плоскости AB. Примем один из этих перпендикуляров, например cc', за ось вращения, около которой повернем систему без значков на 180°, оставляя систему со значками в неизменном положении. Прямая a_0a примет положение $a_0'a''$, прямая b_0b — положение $b_0'b''$ и т. д., причем прямые a_0a_0', b_0b_0', ..., находящиеся в плоскости AB, пройдут через точку c_0 и разделятся в ней пополам. Соединим точку c_0 со всеми точками a'', b'', .., а также с точками a', b'... Так как плоскость ac_0a'' проходит через c_0c — пер-

пендикуляр к плоскости AB, то, значит, она сама перпендикулярна к этой плоскости, а потому в ней находится прямая aa', а следовательно, и точка a'. Далее, угол ac_0a_0 одновременно равен углам $a'c_0a_0$ и $a''c_0a'_0$; значит, оба последних угла равны, а так как $c_0a'_0$ составляет продолжение a_0c_0, то, значит, и $a''c_0$ составляет продолжение $a'c_0$. Но то же относится и ко всем другим точкам системы. Поэтому, точка c_0 есть центр обратного равенства обеих систем, а потому их соответственные линейные элементы обратно параллельны.

Следствие a. Отсюда видим, что понятие обратного равенства тожественно с понятием симметричности. Если даны две системы точек $a''b'', \ldots$ и $a'b', \ldots$ (фиг. 119), связанных между собою центром обратного равенства c_0, то, приняв произвольную прямую $c'c$, проходящую через точку c_0, за ось вращения, и повернув систему точек a'', $b'', \ldots$ на 180°, мы найдем, что эта система в новом положении, а именно, в виде системы точек a, $b, \ldots$, будет симметрична с системою a', $b', \ldots$, и притом плоскостью симметрии будет плоскость AB, проходящая через c_0 и перпендикулярная к прямой $c'c$. Так как прямая $c'c$ взята произвольно, то, значит, две обратно равные системы могут быть расположены симметрично по отношению к какой угодно плоскости, проходящей через центр обратного равенства.

Следствие b. Поверхность фигуры, имеющей центр, состоит из двух половин, обратно равных.

Примечание. Таким образом, термин „обратное равенство" имеет различный смысл для фигур в пространстве и на плоскости. Тогда как для первых он тожествен с симметричностью, для вторых он имеет смысл собственно равенства (совместимости) при обратной параллельности сторон.

Определение 24. Равные или симметричные (обратно равные) многогранники, выполняющие пространство, называются стереоэдрами; если же они выполняют пространство в параллельном положении, то называются параллелоэдрами.

Примечание. Если систему выполняющих плоскость планигонов мы переместим по какому-нибудь направлению на величину a, то путь, пройденный каждой из плоских фигур, представит собою телесную фигуру, а именно, призму с основанием — данным планигоном и боковыми ребрами, равными a. Призмы эти будут, очевидно, стереоэдрами, так как их совокупность представит собою слой, ограниченный двумя параллельными плоскостями, а такими слоями можно выполнить пространство. Параллелогоны превращаются при этом в параллелоэдры, так как образовавшиеся призмы будут выполнять пространство в параллельном положении. Отсюда мы заключаем, между прочим, что в числе параллелоэдров имеются двоякого рода призмы, а именно с основаниями — ди- и трипараллелогоном. Теперь перейдем к решению задачи о всех существующих параллелоэдрах.

Параллелоэдры[74]

§ 75. Теорема 35. *Параллелоэдр есть парногранник.* Так как общая грань двух смежных фигур имеет обратное направление сторон, смотря по тому, будем ли мы ее рассматривать как грань одной или как грань другой фигуры, то, следовательно, эти две грани не равны, а обратно равны, а потому, если выполняющие пространство фигуры равны между собою, то в каждой из них должна заключаться пара граней параллельных и обратно равных; то же относится и ко всякой другой грани.

Примечание. Пара обратно равных, т. е. симметричных, граней параллелоэдра расположена параллельно, и притом их внутренние стороны обращены друг к другу. Мы можем простым поступательным движением совместить эти грани. Если мы представим себе, что в этом поступательном движении участвует вся система параллелоэдров, то при том направлении и той величине поступания, при которых совпадает пара граней параллелоэдра, новое поло-

жение всей системы совпадает с первоначальным. Такое поступание имеет место для каждой пары граней, хотя может случиться, что для нескольких смежных граней потребуется одно и то же направление и та же величина поступания. Направления и величины этих поступаний мы будем называть соответственными направлениями и промежутком ряда системы параллелоэдров в данном направлении. Ясно, что если совпадение произошло при поступании в некотором направлении на величину a, то оно произойдет и при том же поступании на величину $2a, 3a, \ldots$ Если внутри параллелоэдра возьмем произвольную точку, то, благодаря этим поступаниям, получится ряд точек в соответственном направлении, и притом каждые две смежные точки этого ряда будут находиться на одинаковом расстоянии, равном промежутку ряда системы в данном направлении; ясно, что все эти точки будут соответственными точками фигур, образующих ряд, все члены которого связываются гранями, имеющими в пространстве параллельное положение.

Итак, допустим, что в данной системе параллелоэдров мы выделили ряд фигур A, B, $C, \ldots$ Но, исходя из той же фигуры A, мы можем получить ряд и в каком-нибудь другом направлении, например, какой-нибудь ряд A, A_1, $A_2, \ldots$; такой же и притом ему параллельный ряд мы можем получить и из точек B, $C, \ldots$; пусть эти ряды будут B, B_1, $B_2 \ldots$ и C, C_1, $C_2, \ldots$ Совокупность всех этих фигур мы будем называть слоем. Ясно, что все соответственные точки слоя будут находиться в одной плоскости и составят плоскую сетку. Так как слой еще не выполняет пространства, то, значит, к каждой его фигуре примыкает еще по меньшей мере одна фигура, не входящая в состав слоя. Пусть такою фигурою по отношению к A будет A'. Ясно, что, исходя из этих двух фигур, мы снова получим ряд A, A', $A'', \ldots$, из членов которого только одна фигура A принадлежит данному слою. Но такие же и притом параллельные ему ряды мы можем вывести из каж-

дой фигуры слоя; так из фигуры B мы выведем ряд B, B', B'', ...; из фигуры B_1 — ряд B_1, B'_1, B''_1, ... Нетрудно убедиться, что совокупность всех фигур со значком составит новый слой фигур, все члены которого будут иметь общие грани с членами раньше полученного слоя, и т. д. Соответственные точки этого второго, потом третьего и т. д. слоев составят плоские сетки, равные и параллельные плоским сеткам первого слоя; совокупность же этих плоских сеток составит то, что называется пространственною решеткою (Raumgitter) или систему параллелопипедов, все вершины (узлы) которой представляют собою соответственные точки системы параллелоэдров.

Если внутри одного из параллелопипедов мы возьмем произвольную точку, а затем построим соответственные точки для всех других параллелопипедов системы, то получим новую пространственную решетку, равную и параллельную первой, а потому все узлы этой новой решетки будут также соответственными точками фигур системы параллелоэдров. Поэтому, если бы оказалось, что узлы данной решетки не обнимают собою всех соответственных точек системы параллелоэдров, то не вошедшие в состав узлов решетки соответственные точки составили бы новые пространственные решетки, равные и параллельные первой. Совокупность соответственных точек, следовательно, все-таки распалась бы на систему равных и параллельных плоских сеток, каждой из которых соответствует определенный слой параллелоэдров. Мы назовем смежными такие два слоя параллелоэдров, между соответственными плоскими сетками которых не заключается никаких других; а потому, если бы в вышеприведенном рассуждении мы взяли два смежных слоя фигур, то получили бы соответственно пространственную решетку, обнимающую все соответственные точки системы.

Следствие. На основании следствия „c)“ теоремы 29 мы заключаем, что каким бы растяжениям и сдвигам мы ни подвергали систему параллелоэдров, она осталась бы таковою

и после изменения, и соответственные точки снова составили бы какую-нибудь пространственную решетку.

Теорема 36. *Объем параллелоэдра равен объему параллелопипеда соответствующей ему пространственной решетки.*

В самом деле, если мы построим из всех соответственных точек системы параллелоэдров пространственную решетку и разделим объем параллелоэдра на объемные элементы, каждый из которых находился бы одновременно внутри параллелоэдра и какого-нибудь параллелопипеда решетки, то на такие же элементы можно разделить и все параллелоэдры и параллелопипеды системы. Если в каждом параллелоэдре заключается n таких элементов, то система из n таких элементов во всех фигурах выполнит собою все пространство; на те же n элементов разделится и объем параллелопипеда системы, а совокупность всех параллелопипедов также выполнит собою все пространство. Следовательно, объемы параллелопипеда и параллелоэдра разделились на n одинаковых элементов, и, значит, они равны между собою.

§ 76. Определение 25. Параллелоэдр, имеющий центр, называется первичным; в противном случае он вторичный.

Теорема 37. *Первичный параллелоэдр есть равнореберный зоноэдр.*

По определению этой фигуры как параллелоэдра мы имеем, что пара его соответственных граней может быть приведена к совмещению некоторым поступательным движением. Но так как эта фигура имеет центр, то совмещение может быть произведено таким же образом, если одну из граней мы обернем в ее плоскости на 180°. Отсюда следует, что грани его должны иметь попарно равные и обратно параллельные стороны, т. е. быть парносторонниками, имеющими центр.

Примечание. В этом случае совмещение симметричных граней происходит по той причине, что одна относительно другой является обернутой, так как обе грани обращены друг к другу внутренней стороной.

Определение 26. Первичный параллелоэдр называется простым, если он имеет лишь по одной паре обратно равных и параллельных сторон; в противном случае он сложный.

Теорема 38. *Всякий выпуклый параллелоэдр есть параллелоэдр простой.*

На основании теоремы 23 заключаем, что он имеет центр и, следовательно, первичен, а потому представляет собою равнореберный зоноэдр. Если бы в нем было больше одной, например две, пары обратно равных и параллельных граней, то, рассекши его диаметральной плоскостью через обе пары граней, мы получили бы выпуклый многоугольник с двумя парами параллельных сторон, а это невозможно (по теореме 2).

Определение 27. Соответственной плоскостью системы параллелоэдров называется плоскость, проходящая через две соответственные прямые, или, что все равно, параллельная двум соответственным направлениям.

Теорема 39. *Число соответственных направлений простого параллелоэдра равно числу пар его граней.*

В самом деле, соответственное направление есть то, перемещение по которому на промежуток ряда приводит к совмещению пару соответственных граней параллелоэдра. Но так как грани простого параллелоэдра суть парносторонники, имеющие центр, то, соединив центры двух соответственных граней, мы и получим соответственную прямую, проходящую через центр фигуры, а таких прямых в простой фигуре существует столько, сколько пар граней.

Примечание. Теорема эта не применима к сложным параллелоэдрам, так как прямая, соединяющая центры его диаметрально противоположных граней, может и не быть соответственною.

Теорема 40. *Число соответственных плоскостей простого параллелоэдра равно числу его* (первичных и вторичных) *поясов.*

В самом деле, как пояс, так и соответственная плоскость определяются двумя парами каких-нибудь граней параллелоэдра.

С л е д с т в и е. В соответственной плоскости находятся соответственные точки слоя параллелоэдров; следовательно, по числу поясов простого параллелоэдра определяется число различных положений его слоев.

Т е о р е м а 41. *Плоское сечение* (первичного) *пояса простого параллелоэдра есть простой параллелогон.*

Возьмем слой фигур, соответствующий какому-нибудь первичному поясу простого параллелоэдра, и продолжим грани, образующие этот пояс, до бесконечности; мы получим систему бесконечных призм бесконечной длины, выполняющих пространство в параллельном положении. Всякое же плоское сечение этой системы будет системою плоских фигур, выполняющих плоскость в параллельном положении, т. е. параллелогонов и притом простых, так как в призмах имеется лишь по одной паре равных параллельных граней.

С л е д с т в и е. Отсюда заключаем, что (первичные) пояса простого параллелоэдра не могут иметь наименования выше шести, а именно они могут быть лишь четырех- и шестигранные.

П р и м е ч а н и е. Пояса, плоское сечение которых простой параллелогон, мы будем называть параллелогональными.

Т е о р е м а 42. *Грани простого параллелоэдра — простые параллелогоны.*

По теореме 37, грани эти парносторонники, имеющие центр. Кроме того, они не могут иметь больше чем по одной паре параллельных сторон, так как в таком случае, приняв пару таких граней за основания, мы получим два главных пояса с параллельными ребрами; побочный пояс пересекал бы этот пояс в двух парах обратно равных и параллельных граней, а это противоречит условию. Остается доказать, что наименование этих граней не выше 6. Допустив это последнее, мы получим, что и все побочные пояса имеют наименование высшее, чем 6, а по теореме 41 это невозможно.

§ 77. Основываясь на только что выведенных теоремах, мы можем произвести

Систематический вывод всех выпуклых параллелоэдров

Нам нужно определить выпуклые зоноэдры, пояса и грани которых имеют наименование не выше 6. Зная, что каждый зоноэдр в числе граней имеет и грани четырехугольные, мы можем принимать всегда пару таких граней за основание.

При этом исследовании мы встречаем следующие случаи.

1) Основной пояс — трипараллелогональный; боковые его грани — трипараллелогоны.

В этом случае имеется (по следствию теоремы 19) четыре побочных пояса; следовательно, всего имеется 6 поясов, и функция зоноэдра равна $5 \cdot 6 = 30 = f' = 1 \cdot 2f_2 + 2 \cdot 3f_3$; притом $r' = 2f' = 60$ и $l' = \frac{r'}{p} = 10$. Но так как наибольшая величина l есть 6, то, значит, для образования фигуры должно исчезнуть не меньше $4 \cdot 6$ ребер, и, значит, искомый параллелоэдр должен иметь не менее 4 пар шестиугольных граней; но из основной формулы $f_2 = 3(5 - f_3)$, и, значит, он и не может иметь больше 4 пар таких граней, а потому $f_3 = 4$ и $f_2 = 3$.

Впрочем, в том же мы можем убедиться и другим образом. Примем пару боковых граней за основания; в таком случае все побочные пояса не могут иметь наименования ниже 6, но они не могут иметь и высшего наименования, а потому все пояса искомой фигуры трипараллелогональны; поэтому, приняв снова за основания четырехугольники, мы можем сказать, что четыре побочных пояса образуют две пары перекрестных поясов, пересекающихся в двух парах четырехугольных граней, не принадлежащих главным поясам. Число ребер параллелоэдра равно $6 \cdot 6 = 36$. Число его граней определится следующим образом:

Число граней основного пояса	6
„ „ главного „ . . . . $6 - 2 =$	4
„ „ двух пар перекрестных поясов . . . $2 \cdot 2 =$	4
Сумма	14

В этом вычислении наименование главных поясов мы уменьшаем на 2, так как они имеют с основным пару общих граней.

Пара оснований и две пары общих граней перекрестных поясов — четырехугольные, т. е. дипараллелогоны; остальные восемь граней — трипараллелогоны. Число вершин равно $36+2-14=24$. Сумма двугранных углов $\Sigma B=6\cdot 8d=48d$. Среднее наименование гоноэдра $N=\frac{2r}{n}=\frac{72}{24}=3$; значит, все углы фигуры суть тригоноэдры. Средняя величина гоноэдра $\frac{\Sigma B-2d(f-2)}{n}=d$, а потому у каждой вершины встречаются 4 фигуры.

Этим вполне определяется эта фигура, т. е. гептапараллелоэдр (фиг. 114).

2) Основной пояс трипараллелогональный; боковые его грани ди- и трипараллелогон.

В этом случае фигура имеет три побочных и, значит, всего 5 поясов; ее зоноэдрическая функция $4\cdot 5=20=f'=$ $=1\cdot 2f_2+2\cdot 3f_3$. Все пояса фигуры, кроме тех, которые проходят через шестиугольные грани, должны быть трипараллелогональны, так как шестиугольные грани мы можем принять за основания. Поэтому в числе побочных должны находиться и перекрестные пояса. Но так как побочных поясов всего три, то, значит, может существовать не более одного поперечного пояса. Но существование такого пояса совершенно неизбежно, так как в этом случае $r'=2f'=40$ и $l'=\frac{r'}{p}=\frac{40}{5}=8$, из чего заключаем, что должно исчезнуть не менее $(8-6)5=10$ ребер; но так как ребра могут исчезать лишь по 6, то, значит, исчезает не менее 12 ребер, а потому $l<6$. Параллелоэдр этот имеет, следовательно, четыре трипараллелогональные и один дипараллелогональный пояс. Число его ребер $4\cdot 6+4=28$. Число граней определится так:

Число граней основного пояса	6
„ „ главного „	4
„ „ двух перекрестных поясов . . .	2
Сумма	12[1])

Четыре грани поперечного пояса трипараллелогоны; остальные грани дипараллелогоны. Число вершин $28+2-12=18$. Сумма двугранных углов $\Sigma B=4\cdot 8d+4d=36d$. Среднее наименование гоноэдра $N=\frac{2r}{n}=3\frac{1}{9}$, а потому из 9 пар одна должна быть тетра-, а остальные тригоноэдрами. Средняя величина гоноэдра $\frac{\Sigma B-2d(f-2)}{n}=\frac{8}{9}d$. Отсюда нельзя сделать заключения о числе углов, сходящихся при каждой вершине. Для этого определения мы поступим следующим образом: средняя величина двугранного угла дипараллелогонального пояса есть d, а трипараллелогональных поясов $\frac{4d}{3}$; следовательно, для троякого рода гоноэдров этой фигуры мы получим следующие средние величины:

$$G=\frac{2\cdot\frac{4}{3}d+d}{2}-d=\frac{5}{6}d;\quad G_3'=\frac{3\cdot\frac{4}{3}d}{2}-d=d;$$

$$G_4=\frac{4\cdot\frac{4}{3}d}{2}-2d=\frac{2}{3}d.$$

Гоноэдров G_3 и G_3' имеется по четыре пары, а гоноэдров G_4 — одна пара. Гоноэдры G_3' в числе 4 встречаются у одной вершины, а четыре гоноэдра G_3 встречаются при одной вершине с гоноэдром G_4, так что $4\cdot\frac{5}{6}d+\frac{2}{3}d=4d$.

Этим вполне определяется относящийся сюда гексапараллелоэдр, который уже мы встречали под именем „удлиненного ромбического додекаэдра“ (фиг. 111).

[1]) В этот счет не входят вообще поперечные пояса, так как все их грани общи с гранями главных поясов.

3) Основной пояс трипараллелогональный; обе боковые грани дипараллелогоны.

В этом случае фигура имеет два побочных, а всего четыре пояса; ее зоноэдрическая функция $3 \cdot 4 = 12 = f' = 1 \cdot 2f_2 + 2 \cdot 3f_3$. В ней нет трипараллелогональных граней, так как в противном случае мы могли бы задаться ими в составе основного пояса; поэтому $f_3 = 0$ и, значит, $f' = f = 2f_2 = 12$; $r = 2f = 24$; $l = \frac{r}{p} = 6$; $n = 24 + 2 - 12 = 14$; $\Sigma B = 4 \cdot 8d = 32d$. Среднее наименование гоноэдра $N = \frac{2r}{n} = 3\frac{3}{7}$, а потому из семи пар углов имеется четыре тригоноэдра и три тетрагоноэдра. Средняя величина гоноэдра $\frac{\Sigma B - 2d(f-2)}{n} = \frac{6}{7}d$; но так как средняя величина двугранного угла $\frac{4d}{3}$, то средняя величина тригоноэдра $\frac{3 \cdot \frac{4}{3}d}{2} - d = d$ и тетрагоноэдра $\frac{4 \cdot \frac{4}{3}d}{2} - 2d = \frac{2}{3}d$; значит, у одной вершины сходится по четыре тригоноэдра или по шести тетрагоноэдров. Этот гексапараллелоэдр в его частном виде известен под именем ромбического додекаэдра.[1])

Таким образом, гексапараллелоэдр является в двух видимо разнородных фигурах. Однако, как уже было указано, все различие этих фигур состоит в том, что один из вторичных

---

[1]) Как известно, эту именно фигуру имеют пчелиные ячейки. Если мы возьмем особый притупленный октаэдр, ромбический додекаэдр и куб одинакового объема, то поверхности их будут относиться, как $\frac{1+2\sqrt{3}}{4} : \sqrt[6]{2} : \sqrt[3]{2}$ или $1 : 1.00577 : 1.12894$. В это отношение нельзя ввести удлиненной по трипараллелогональному поясу фигуры, так как соответственное число будет зависеть от степени удлинения и притом уменьшаться вместе с ним.

По вопросу о пчелиной ячейке имеется маленькая литература, а именно в 1743 г. об этом предмете писал Маклорен в „Philosophical transactions", в 1781 г. Кастиллон и Льюильер — в „Mémoires de l'Academie de Berlin", в 1858 г. Брухам — в „Comptes rendus" (т. 46, стр. 1024—1029) и в 1860 г. Виллиш — там же (т. 51, стр. 633).[75]

поясов одной фигуры удлиняется и становится первичным, почему грани этого пояса из четырехугольных становятся шестиугольными.

4) Основной пояс дипараллелогональный; боковые его грани трипараллелогоны.

В этом случае фигура имеет два побочных, а всего 4 пояса; поэтому ее зоноэдрическая функция $3 \cdot 4 = 12 = f' = 1 \cdot 2f_2 + 2 \cdot 3f_3$, откуда $f_2 = 3(2 - f_3)$; отсюда заключаем, что f_3 не может быть больше единицы, и, значит, относящийся сюда тетрапараллелоэдр есть не что иное, как гексагональная призма.

5) Основной пояс и его боковые грани дипараллелогональные.

В этом случае фигура имеет лишь 3 пояса, а потому ее зоноэдрическая функция $2 \cdot 3 = 6 = f' = 1 \cdot 2f_2 + 2 \cdot 3f_3$; но так как фигура не имеет (и не может иметь) шестиугольных граней, то, значит, $f_3 = 0$ и $f = 6$. Ясно, что этот трипараллелоэдр есть не что иное, как параллелопипед или четырехгранная призма.

Вывод этот показывает нам, что параллелоэдры суть первые члены простейших рядов зоноэдров; нет параллелоэдра лишь в ряде зоноэдров с тремя парами шестиугольных граней; но, как мы видели, первый член этого ряда и вообще не существует. В самом простом зоноэдрическом ряде, а именно ряде полигональных зоноэдров первого рода, оба первые члены — параллелоэдры.[1])

[1]) Зная все системы параллелоэдров, мы можем вывести все правильные системы соприкасающихся шаров. Удлиненный ромбический додекаэдр не дает системы шаров, так как в нем шар касается лишь по одному поясу. Гексагональную же призму для этого вывода нужно взять типическую. Таким образом получим 4 системы:

1) соответствующая кубу; каждый шар соприкасается с 6 шарами системы;

2) соответствующая гексагональной призме; каждый шар соприкасается с 8 шарами системы;

3) соответствующая ромбическому додекаэдру; каждый шар соприкасается с 12 шарами системы;

§ 78. Некоторые из сделанных выводов могут быть обобщены до степени теорем, а именно:

Теорема 43. *Грань вторичного пояса простого параллелоэдра может быть только дипараллелогоном.*

В самом деле, если бы одна из них была трипараллелогоном, то, приняв ее за основание, мы получили бы, что все побочные пояса должны быть поперечными, т. е. иметь только грани, общие с гранями главных поясов; в противном случае наименование побочного пояса было бы выше шести, что невозможно; а если все грани принадлежат главным поясам, то, значит, вовсе нет таких, которые могли бы с основаниями составить вторичный пояс.

Теорема 44. *Вторичный пояс простого параллелоэдра может быть только дипараллелогональным.*

Если бы какой-нибудь вторичный пояс был трипараллелогональным, то, приняв одну из его пар граней (дипараллелогонов) за основания, мы получили бы кроме двух главных поясов еще, по меньшей мере, две пары перекрестных, всего 6 поясов; функция фигуры, по меньшей мере, $5 \cdot 6 = 30$; но такую функцию имеет лишь гептапараллелоэдр, не имеющий трипараллелогонального вторичного пояса.

Теорема 45. *Грань вторичного пояса есть общая грань двух трипараллелогональных поясов.*

Если мы примем ее за основание, то, кроме главных, должны иметься и перекрестные пояса; иначе она и не была бы гранью вторичного пояса. Поэтому главные пояса, кроме

4) соответствующая притупленному октаэдру; каждый шар соприкасается с 8 шарами системы. Плоскости касания соответствуют граням октаэдра.[76]

Вывод этих систем весьма неудачно выполнен был в недавно появившейся работе У. Барлоу (W. Barlow. Probable nature of the internal symmetry of cristals. Nature, № 738, стр. 186, 1883), а именно он вывел 5 систем, из которых 3-я тожественна с 4-ю (соответствующей ромбическому додекаэдру), 2-я тожественна с 5-ю (соответствующей кубу), 1-я система соответствует притупленному октаэдру, а система, соответствующая гексагональной призме, вовсе упущена автором.

оснований, имеют еще четыре общие грани с двумя перекрестными поясами.

§ 79. Теперь определим число соответственных плоскостей и вторичных поясов каждого простого параллелоэдра:

1) *Гептапараллелоэдр.* По основной полярно-зоноэдрической формуле $f(f-1)=1\cdot 2p_2+2\cdot 3p_3$; в данном случае $f=7$ и $p_3=6$, и притом все первичные пояса трипараллелогональны; следовательно, $p_2=3$ и будет число вторичных поясов; отсюда выводим число соответственных плоскостей $6+3=9$.

2) *Удлиненный гексапараллелоэдр.* В этом случае $f=6$, $p_3=4$, и еще имеется один дипараллелогональный пояс; следовательно, число вторичных поясов будет $p_2-1=2$; отсюда число соответственных плоскостей $4+1+2=7$.

3) *Обыкновенный гексапараллелоэдр.* В этом случае $f=6$, $p_3=4$, и притом все первичные пояса трипараллелогональны; следовательно, $p_2=3$ и есть число вторичных поясов; отсюда число соответственных плоскостей опять $4+3=7$.

4) *Тетрапараллелоэдр.* В этом случае $f=4$, $p_3=1$, и еще 3 дипараллелогональных первичных пояса; следовательно, число вторичных равно $p_2-3=3-3=0$, т. е. их вовсе нет; отсюда число соответственных плоскостей $1+3=4$.

5) *Трипараллелоэдр.* В этом случае $f=3$, $p_3=0$; значит, нет вторичных поясов и имеется 3 соответственные плоскости.

Из этого перечня видим, что не только число соответственных прямых, но и число соответственных плоскостей у обоих гексапараллелоэдров одинаково, что, впрочем, и непосредственно ясно.

§ 80. Определение 28. Соответственными точками второго порядка в системе параллелоэдров, если принять центры фигур за соответственные точки первого, называются центры системы вообще.

Примечание. Центры фигур суть, очевидно, и центры системы. Кроме них не может внутри фигур нахо-

диться никаких других центров системы, так как если какие-нибудь точки внутри фигуры были бы центрами системы, то они были бы и центрами самих фигур. Поэтому такие точки могут быть лишь на поверхности фигур и притом, понятно, лишь в вершинах, серединах ребер и центрах граней.

Соответственными точками второго порядка, смежными с центром фигуры, мы будем называть те, которые находятся на поверхности этой самой фигуры.

Определение 29. Соответственными прямыми второго порядка называются прямые, соединяющие центр фигуры со смежными соответственными точками второго порядка.

Определение 30. Соответственными плоскостями второго порядка называются плоскости, проходящие через соответственные прямые первого и второго порядка.

Теорема 46. *Центры граней всех параллелоэдров суть соответственные точки второго порядка.*

Пусть два параллелоэдра системы P_1 и P_2 имеют общую грань. Проведем через центр этой грани и через диаметрально противоположные ей в обеих фигурах точки какие-нибудь параллельные секущие плоскости; получаем 4 плоские фигуры сечения трех плоскостей с фигурами P_1 и P_2. Плоские фигуры сечения одного и того же параллелоэдра будут обратно равны и параллельны, так как он имеет центр, а сечения сделаны параллельно и проходят через диаметрально противоположные точки. Напротив того, соответственные сечения обеих фигур будут прямо равны и параллельны в силу параллельности самих фигур. Отсюда заключаем, что несоответственные сечения обеих фигур будут обратно равны и параллельны. Нетрудно убедиться, что центр общей грани фигур P_1 и P_2 и будет центром обратного равенства сечений, а так как сечения взяты произвольно, то и самих фигур.

Теперь продолжим неопределенно общую грань, чем и разделим систему параллелоэдров на две половины. Если

перпендикуляр к грани через ее центр примем за ось вращения, около которой повернем одну половину системы на 180°, то, по следствию „a“ теоремы 34, P' и P'' примут симметричное положение по отношению к проведенной плоскости. Но если P' и P'' имеют симметричное положение, то такое же положение будут иметь и фигуры, с ними смежные, и т. д.; другими словами, обе половины системы будут симметричны по отношению к их общей плоскости. Сделав обратное движение, мы придем к прежнему положению, и притом, по теореме 34, центр грани будет центром обратного равенства.

Примечание. Я буду говорить, что две фигуры системы параллелоэдров касаются в какой-нибудь вершине или по какому-нибудь ребру, если они имеют общими между собою только эту вершину или только это ребро.

Все вершины и середины ребер, в которых касаются две фигуры системы параллелоэдров, суть соответственные точки второго порядка.

Ясно, что если какая-нибудь вершина или середина ребра представляет собою соответственную точку второго порядка, т. е. центр системы параллелоэдров, то грани и ребра, сходящиеся в одной фигуре при этой точке или при этом ребре, составляют продолжение граней и ребер другой фигуры, соприкасающейся с первой по этой вершине или этому ребру.

Наоборот, если такое продолжение граней и ребер двух фигур, соприкасающихся в вершине или по ребру, имеет место, то эта вершина или середина ребра будут центрами двух соприкасающихся фигур, а следовательно, и всей системы. Но, рассматривая выведенные параллелоэдры, мы увидим, что только такое прикосновение в них и имеет место.

§ 81. Перейдем теперь к определению соответственных прямых и плоскостей второго порядка. Трипараллелоэдр представляет собою параллелопипед пространственной ре-

шетки. В нем и вершины, и середины ребер представляют соответственные точки второго порядка.[1]) Поэтому соответственными плоскостями второго порядка будут диаметральные плоскости, проходящие через ребра фигур. Таких плоскостей будет, следовательно, шесть, и притом они образуют двоякого рода пояса;[2]) оси одних совпадают с соответственными прямыми первого порядка, и в этих осях пересекается по две плоскости; оси других представляют прямые, соединяющие противоположные вершины фигуры, и в этих осях пересекается по три плоскости; здесь мы встречаем, следовательно, то же соотношение, что в гранях гексапараллелоэдра, а потому можем сказать, что соответственные плоскости второго порядка в трипараллелоэдре параллельны граням некоторого гексапараллелоэдра. Соответственные же плоскости первого порядка этой фигуры, как мы видели, числом 3, параллельны граням самой фигуры.

В тетрапараллелоэдре — четыре соответственные прямые и соответственные плоскости первого порядка, и притом плоскости эти образуют двоякого рода пояса: a) шестигранные, ось которых совпадает с осью самой фигуры, т. е. гексагональной призмы, и b) четырехгранные, оси которых находятся в плоскости, параллельной основаниям призмы. Поэтому можно сказать, что соответственные плоскости первого порядка тетрапараллелоэдра параллельны граням некоторого другого тетрапараллелоэдра, имеющего с первым общую ось трипараллелогонального пояса. Соответственными точками второго порядка тетрапараллелоэдра являются середины ребер оснований, числом 12. Поэтому, в нем имеется шесть соответственных прямых второго порядка, представ-

---

[1]) Центры граней мы не принимаем в расчет, так как прямые, соединяющие центр фигуры с этими точками, будут соответственными прямыми первого порядка.

[2]) В данном случае под поясом мы подразумеваем несколько плоскостей, пересекающихся по одной прямой.

ляющих оси поясов, образуемых 12 плоскостями второго порядка, не параллельными граням никакого параллелоэдра.

Гексапараллелоэдр (все равно, обыкновенный или удлиненный) имеет шесть соответственных прямых первого порядка, группирующихся в семь плоскостей первого порядка; плоскости эти образуют двоякого рода пояса: a) шестигранные, оси которых совпадают с соответственными прямыми первого порядка, и b) четырехгранные, оси которых совпадают с соответственными прямыми второго порядка. Поэтому можно сказать, что соответственные плоскости первого порядка гексапараллелоэдра параллельны граням гептапараллелоэдра. Соответственными точками второго порядка гексапараллелоэдра являются вершины тетрагоноэдров, или, в случае удлиненной фигуры, две пары таких вершин замещаются серединами ребер первичного дипараллелогонального пояса; поэтому в этой фигуре имеется лишь три соответственных прямых второго порядка, а собственно плоскостей второго порядка и вовсе нет.

В гептапараллелоэдре имеется семь соответственных прямых первого порядка и полное отсутствие соответственных прямых и плоскостей второго порядка. Соответственные плоскости первого порядка, числом 9, не могут быть параллельны плоскостям какого-нибудь параллелоэдра. Однако, их можно разделить на две группы, и тогда получится, что плоскости одной группы параллельны граням трипараллелоэдра, а плоскости другой — граням гексапараллелоэдра.

Приведенными соображениями уясняются соотношения между параллелоэдрами, и из них видно, что все простые параллелоэдры могут быть разделены на две группы, к одной из которых относится тетрапараллелоэдр, а к другой — все остальные.[77]

§ 82. Теорема 47. ***Фигуры сечения параллелоэдров вообще плоскостями, проходящими через какие-нибудь три соответственные точки системы, суть параллелогоны какого-нибудь порядка.***

В самом деле, плоскость, проходящая через три узла пространственной решетки, пересекает ее в плоской сетке, в чем легко убедиться, если принять в расчет, что три точки на этой плоскости определяют собою параллелограм, стороны которого выражают направление и величину поступания, приводящего к совмещению системы с первоначальным положением.

Если же соответственные точки какой-нибудь выполняющей плоскость системы фигур представляют плоскую сетку, то известная их совокупность, по площади равная параллелограму сетки, представляет собою параллелогон, а каждая из фигур, на которые разделяется параллелогон, будет параллелогоном высшего порядка, а именно n-го, если параллелогон разделен на n таких фигур.

Примечание. Самыми простыми сечениями будут вообще сечения соответственными плоскостями. Так, сечения выпуклых простых параллелоэдров представляют собою выпуклые параллелогоны не выше второго порядка. В следующих табличках горизонтальные ряды чисел выражают собою последовательно наименования фигур сечения параллелоэдра плоскостями, параллельными какой-нибудь соответственной плоскости, а столбцы выражают собою наименования смежных фигур сечения.

Мы получаем именно:

1) для трипараллелоэдра: сечение плоскостями, параллельными самим граням

4 4 4
  4 4 4
    4 4 4 и т. д.;

2) для тетрапараллелоэдра:

а) секущие плоскости соответствуют трипараллелогональному поясу:

6 6 6
  6 6 6
    6 6 6 и т. д.,

b) секущие плоскости соответствуют дипараллелогональному поясу:

0 (ребро) 4 4 4 0
0 4 4 4 0
0 4 4 4 0 и т. д.,

фигуры сечения — рядовые параллелогоны второго порядка;

3) для гексапараллелоэдра (обыкновенного):

a) секущие плоскости соответствуют трипараллелогональному поясу:

0 (вершина) 3 9 6 9 3 0
0 3 9 6 9 3 0
0 3 9 6 9 3 0 и т. д.,

b) секущие плоскости соответствуют дипараллелогональному (вторичному) поясу:

0 (вершина) 4 8 4 8 4 0
0 4 8 4 8 4 0
0 4 8 4 8 4 0 и т. д.;

4) для удлиненного гексапараллелоэдра:

a) секущие плоскости, соответствующие первичному дипараллелогональному поясу, тожественны с только что приведенными,

b) секущие плоскости, соответствующие вторичному дипараллелогональному поясу:

0 (вершина) 4 8 6 8 4 0
0 4 8 6 8 4 0
0 4 8 6 8 4 0 и т. д.,

c) секущие плоскости, соответствующие трипараллелогональному поясу:

0 (вершина) 3 5 9 6 9 5 3 0
0 3 5 9 6 9 5 3 0
0 3 5 9 6 9 5 3 0 и т. д.,

здесь также получаются рядовые параллелогоны (пятиугольники) второго порядка;

5) для гептапараллелоэдра:

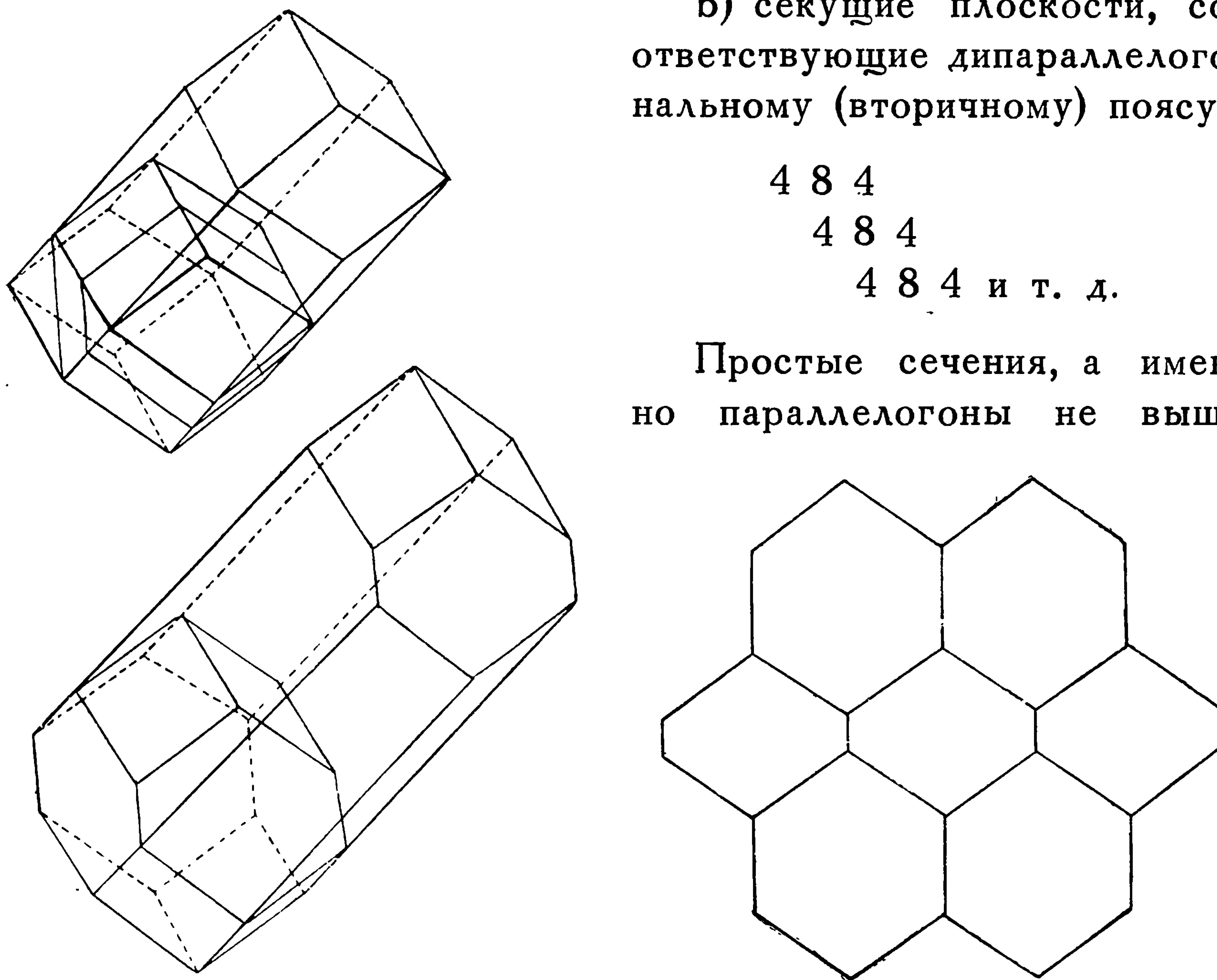
a) секущие плоскости, соответствующие трипараллелогональному поясу:

0 (ребро) 4 8 6 8 4 0
0 4 8 6 8 4 0
0 4 8 6 8 4 0 и т. д.,

b) секущие плоскости, соответствующие дипараллелогональному (вторичному) поясу:

4 8 4
4 8 4
4 8 4 и т. д.

Простые сечения, а именно параллелогоны не выше



Фиг. 120.

третьего порядка, получаются плоскостями, параллельными соответственным плоскостям второго порядка и плоскостями, параллельными граням (фиг. 114, 120).

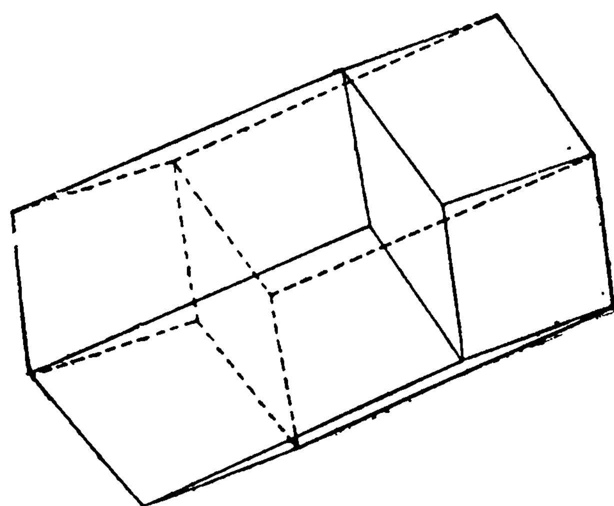
§ 83. Мы знаем, что все ребра одного пояса параллелоэдра равны между собою; но величина этого ребра совершенно произвольна, а потому ее можно брать и равною нулю, и параллелоэдр останется параллелоэдром; при этом параллелоэдр превращается, однако, в некоторый другой, а именно: гептапараллелоэдр превращается в удлиненный гексапараллелоэдр; последний, смотря по тому, сократим ли мы до нуля ребра трипараллелогонального или дипараллелогонального пояса, превратится в тетрапараллелоэдр или обыкновенный гексапараллелоэдр. Этот последний, так же как и тетрапараллелоэдр, превращается этим путем в трипараллелоэдр.

Сделанный выше вывод простых выпуклых параллелоэдров одинаково приложим и к простым вогнутым, почему мы и ограничимся здесь приведением их изображений. Вогнутого тетрапараллелоэдра мы не изображаем, так как это просто призма с основаниями — вогнутыми трипараллелогонами. Фиг. 121 представляет обыкновенный, фиг. 122 — удлиненный вогнутый гексапараллелоэдр, а фиг. 123 — вогнутый гептапараллелоэдр. Очевидно, что вогнутого трипараллелоэдра вовсе не существует.

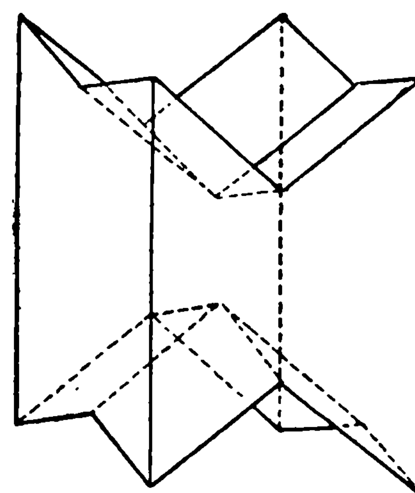
Если сложим один или несколько простых параллелоэдров, принадлежащих одному ряду, то получим сложный параллелоэдр. Исключение представляет трипараллелоэдр, дающий при этом сложении снова простой трипараллелоэдр. Можно для получения сложных параллелоэдров складывать простые и другим образом и в разном числе.

Если одну или несколько граней параллелоэдра или их частей мы заместим некоторыми произвольными поверхностями, опирающимися на те же ломаные так, чтобы получилась сомкнутая поверхность, наблюдая, чтобы точно такое же замещение было произведено в параллельном положении и на соответственных первым гранях или их частях, то, очевидно, что новая фигура будет опять параллелоэдром, но уже не имеющим центра, и не представляющим собою зоно-

эдра, т. е. вторичным. Понятно, что такое построение вторичных параллелоэдров возможно лишь тогда, когда полученная поверхность нового параллелоэдра ни в каких линиях не пересекает самое себя. Понятно, что объем вторичного

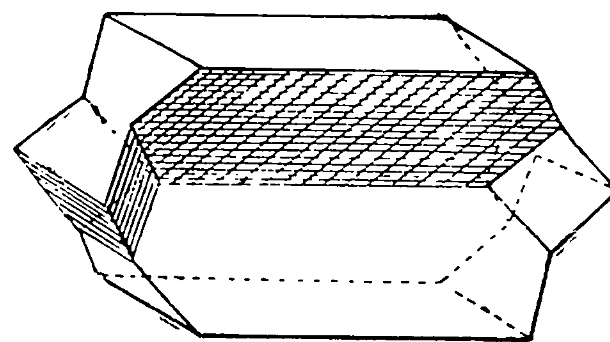


Фиг. 121.



Фиг. 122.

параллелоэдра равен объему соответствующего первичного, так как при его образовании мы прибавляем к нему и отнимаем от него равные объемы. К тому же объем параллелоэдра всегда равен объему параллелопипеда пространственной решетки, а последняя не изменяется при превращении первичного параллелоэдра во вторичный.



Фиг. 123.

Легко понять, что могут существовать и параллелоэдры второго и высшего порядков, для получения которых стоит как-нибудь разделить на части параллелоэдр. Если таких частей n, то каждая из них представляет собою параллелоэдр n-го порядка.

Одним из простейших примеров выпуклых параллелоэдров второго порядка может служить известный уже нам притупленный ромбический додекаэдр (фиг. 115), выполняющий пространство вместе с кубом.

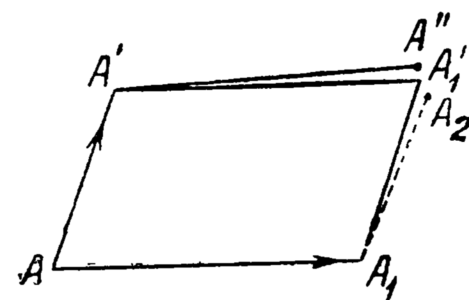
Стереоэдры[78]

§ 84. Примечание. В последующем мы будем подразумевать, что фигуры выполняют пространство правильно, т. е. всякое данное положение одной фигуры вполне определяет собою положение всех смежных (равных или симметричных) ей фигур. При этом условии, то, что нами будет выведено для равных фигур, может быть приложено и для симметричных, так как пара смежных таких фигур образует одну, и фигурами ей равными (а не симметричными) будет выполнено пространство.

Теорема 48. *Несколько стереоэдров всегда складываются в один параллелоэдр.*

Так как общая грань двух смежных равных фигур обращена к обеим фигурам противоположными сторонами, то, значит, смотря по тому, будем ли рассматривать ее как грань одной или как грань другой фигуры, будет различна, а потому, так как фигуры по предположению равны, то, значит, в каждой из них грани расположены попарно, так что если имеется грань a, то должна иметься и симметричная ей грань a'. Движением совмещения будет вообще некоторое винтовое движение, приводящее к совмещению граней a и a'. Но, совместив две фигуры, мы, очевидно, совместим и самые системы выполняющих пространство фигур, так как положение одной фигуры вполне определяет собою и положение всех остальных. В свою очередь, положение каждой фигуры определяет положение винтовых осей, так что в системе стереоэдров существует бесконечное множество равных осей, т. е. таких, около которых одинаковое движение приводит к совмещению системы с первоначальным положением. Каждой из этих осей принадлежит свое движение, приводящее систему к совмещению. Движение же это определяется некоторым элементарным углом α вращения около этой оси и некоторым поступанием a вдоль этой оси. Элементарный угол α может быть соизмерим или несоизмерим с $4d$; в пер-

вом случае известное число элементарных движений приводит каждую фигуру в положение, параллельное первоначальному, а потому получим некоторое поступание, кратное элементарному, параллельное оси и приводящее систему к совмещению. Если имеются различные положения фигур, то мы получим и различные направления поступаний; а достаточно трех таких направлений, чтобы определить пространственную решетку, а следовательно, и удовлетворить тому, что требуется доказать настоящею теоремою. Поэтому мы ее докажем в самом общем виде, если докажем невозможность несоизмеримости с d углов α при отсутствии поступаний, приводящих к совмещению. При этих условиях никакие две фигуры, находящиеся друг от друга в конечном растоянии, не могут отличаться по своему положению на величину, меньшую всякой данной, так как для их совмещения потребовалось бы конечное число движений около некоторой винтовой оси. Мы же докажем, что всегда существуют на конечном расстоянии друг от друга две фигуры, отличающиеся по своему положению на величину, меньшую всякой данной, т. е. просто параллельные.



Фиг. 124.

Возьмем на оси AA' (фиг. 124)[79] точку A и проведем через A прямую AA_1, параллельную некоторой другой ближайшей оси, предполагающейся находящейся выше плоскости чертежа (если только нет такой оси, которая бы пересекалась с осью AA'). Величины AA' и AA_1 мы всегда можем взять столь большими, чтобы некоторые фигуры, соответственные точки которых будут A', и точка, весьма близкая к A_1, отличались бы по своему положению от фигуры A на величину, меньшую всякой данной. В таком случае, положения прямой $A'A''$, соответственной AA_1, а также прямой A_1A_2, соответственной AA', будут также отличаться от AA_1 и AA' на величины, меньшие всякой данной (т. е. образовать бесконечно малые углы $A''A'A'_1$ и $A_2A_1A'_1$, если $A'A'_1 \parallel AA_1$ и

$A_1A_2 \parallel AA'$); но из сделанных предположений вытекает, что две фигуры A'' и A_2, из которых одну можем принять находящеюся выше, а другую — ниже плоскости чертежа, если возьмем те части осей, направление вращения около которых выражается означенными на фигуре стрелками, будут обе находиться в конечном расстоянии от точки A'_1, а следовательно, и друг от друга и все-таки отличаться по положению друг от друга на величину, меньшую всякой данной.

Примечание.[80] Если внутри одного стереоэдра возьмем произвольную точку и затем построим соответственные точки во всех других фигурах, то получим систему точек, называющуюся правильной, т. е. такой, что если из какой-нибудь точки проведем лучи ко всем другим точкам системы, и потом то же сделаем с другой точкой, то получим две совмещающиеся друг с другом системы лучей. Если мы предположим, что пространство выполняется не только равными, но и симметричными фигурами, то, как мы видели, пара таких смежных фигур составит одну фигуру, из равных которым будет выполняться пространство. Поэтому каждая точка системы заменится парою точек, и в совокупности система всех соответственных точек представит собою две проникающие друг друга правильные системы, связанные друг с другом определенными плоскостями симметрии.

Исследование правильных систем точек изложено в сочинении Л. Зонке (L. Sohncke. Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur. 1879), и только что доказанная теорема 48 формулирована в нем в следующих словах: „Jedes regelmässige allseitig unendliche Punktsystem besteht im Allegemeinen aus mehreren in einander gestellten kongruenten Raumgittern; oder es reducirt sich in speciellen Fällen auf ein einziges Raumgitter. Die Deckschiebungen des Systems sind identisch mit denen des zu Grunde liegenden Raumgitters“.[81]

Если параллелоэдр имеет симметрию какого-нибудь отделения, как, например, куб, ромбический додекаэдр и особый притупленный октаэдр имеют симметрию гомоэдрического отделения кубо-октаэдрической системы, то на основании изложенного в предыдущем отделе легко заключить, что фигура эта диаметральными плоскостями (а именно по граням элементарных гоноэдров) может быть разделена на равные и симметричные части, а именно, приведенные фигуры разлагаются таким образом на 48 частей; но фигуры гомоэдрические могут быть разделены таким же образом и по законам гемиэдрии и тетартоэдрии, а именно, те же фигуры по закону тетраэдрической гемиэдрии разлагаются на 24 одновременно равных и симметричных частей, так как каждая часть в отдельности имеет плоскость симметрии; по закону додекаэдрической гемиэдрии, те же фигуры разлагаются на 24 равных и симметричных (т. е. на 12 равных и 12 им симметричных); наконец, по закону гироэдрической гемиэдрии эти же фигуры разлагаются на 24 равных, но не симметричных фигур. Точно так же по закону тетартоэдрии они разлагаются уже на 12 равных, а не симметричных частей.

Так как сдвигами и растяжениями куб может быть превращен в какой угодно параллелопипед (теорема 32), а параллелоэдр, подвергающийся этим изменениям, остается параллелоэдром (пункт „с)“ следствия теоремы 29 и теорема 35), то отсюда заключаем, что приведенные три фигуры могут принять вообще всякую симметрию, на какую способен параллелопипед (все системы и их подразделения кристаллографии), а сообразно с этим — разделяться на стереоэдры. При полном отсутствии симметрии они уже не будут разделяться на равные или симметричные части, за исключением параллелопипеда, всегда способного делиться на равные части, подобные целому.

Подобные же соображения применимы и для тетрапа-

раллелоэдра. Только высшая степень его симметрии — гомоэдрия гексагональной системы.

Теорема 49. *Каждая правильная система точек есть система соответственных точек стереоэдров.*

Возьмем вместо точек малые объемные элементы; правильная система точек изменится в правильную систему таких элементов. Если далее мы будем строить такие же системы при условии, что всякий дальнейший элемент непосредственно примыкает к предыдущим, не оставляя пустого промежутка, то придем, наконец, к тому, что в известном направлении элементы сталкиваются, и потому в этом направлении нельзя брать для построения новых элементов. А так как это соображение одинаково применимо для всех направлений, то и получаем, что совокупность элементов, неразрывно связанных с каким-нибудь первоначальным элементом, оформляется в геометрическое тело, сталкивающееся с таким же телом, образовавшимся из смежного элемента. Так как, по условию, система точек правильная, и потому определенные движения, и притом одни и те же, должны привести к совпадению каждые два элемента двух таких тел, то, значит, и совокупность этих элементов, т. е. самые тела, выполняющие пространство, должны совместиться; совмещение же доказывает их равенство, а вместе с тем и то, что они стереоэдры.

Примечание. В предыдущем, определение „правильной системы точек" заимствовано у Зонке.[1]) Но с равным правом этот же термин применим и к совокупности двух правильных систем, из которых одна симметрична с другой. Расширить определение в этом направлении было бы тем последовательнее, что тот же Зонке, исследуя правильные системы точек на плоскости, взял это более ши-

[1]) Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur. 1879, стр. 28. Эти системы те же, что и система Жордана в „Mémoire sur les groupes de mouvements" (Brioschi e Cremona Annali di Matematica, серия II, стр. 168 и 339—344).

рокое определение: „Ein Punktsystem von unbegrenzter Ausdehnung heisse regelmässig, wenn die von allen seinen Punkten ausgehenden Linienbündel übereinstimmen, indem sie entweder sämmtlich congruent, oder *theils congruent theils symmetrisch sind*".[1] [82] Если для различия системы точек с плоскостями симметрии мы назовем правильными двойными системами, то увидим, что только что доказанная теорема одинаково применима как к простым, так и двойным системам.

Как стереоэдры относятся к простым параллелоэдрам, так последние относятся к сложным. При выполнении пространства сложными параллелоэдрами за соответственные точки простых мы можем принимать не те, которые выводятся поступанием по соответственным направлениям на величину промежутка ряда, но точки, выводимые винтовым движением, причем винтовыми осями являются некоторые из осей симметрии. Такие системы выводятся Зонке в его упоминавшемся не раз произведении, и я полагаю, им полезно для отличия присвоить название винтовых систем. Для этого случая только что выведенная теорема формулируется так: *винтовые системы точек суть системы соответственных точек простых параллелоэдров* (причем некоторые из осей симметрии представляют винтовые оси движения совмещения). Эта формулировка не нарушает, впрочем, общности самой теоремы, так как винтовая система есть тоже правильная, а простой параллелоэдр есть также стереоэдр. На простые параллелоэдры в системе сложных мы можем смотреть, как на фигуры, различным образом ориентированные, хотя поверхности их и находятся в параллельном положении.

Я не имею в виду здесь распространяться ни о винтовых системах точек, ни о стереоэдрах вообще, но считаю необходимым указать на особые фигуры, которые могут иметь

---

[1] „Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung". Borchardt's Journ. f. die r. u. ang. Math., т. 77, стр. 48, 1874.

соответственными системами точек системы винтовые. Подобно тому, как из настоящих первичных параллелоэдров можно вывести вторичные, заменяя некоторые части их поверхности другими произвольными поверхностями, так и в некоторых винтовых системах мы можем часть поверхности простого параллелоэдра заместить произвольною поверхностью, причем по данному закону расположения соответственных точек этой системы определятся изменения и других частей поверхности тех же параллелоэдров. Образовавшиеся вторичные фигуры уже не будут параллелоэдрами, так как совмещение смежных таких фигур происходит уже не при простом поступании, но при некотором винтовом движении; фигуры эти будут особенными стереоэдрами, которые, однако, заслуживают названия „винтовых параллелоэдров“, хотя, повторяю, эти винтовые фигуры уже не будут собственно параллелоэдрами, а только особым видоизменением стереоэдров вообще. Ясно, что несколько винтовых параллелоэдров образуют один вторичный параллелоэдр. Таким образом, существует ближайшее соотношение между винтовыми параллелоэдрами винтовых и простыми параллелоэдрами не винтовых систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ОТДЕЛУ IV

Главнейшие свойства плоских сеток и пространственных решеток и отношение их к системам параллелогонов и параллелоэдров[1])

Ввиду важности для приложений к минералогии учения о пространственных решетках, мы выведем здесь важнейшие их свойства и отношения к параллелоэдрам.

---

1) Изучение свойств плоских сеток и пространственных решеток впервые сделано в произведении Браве (Bravais. Mémoire sur les systèmes formés par des points, distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace. Journ. de l'ecole polyt., тетр. 33, 1850). Независимо от него тот же предмет изучал Франкенгейм (Frankenheim. Über die Anordnung der Molecule im Krystall. Pog. ann., т. 97, стр. 337, 1856).

Условимся называть всякую прямую, параллельную прямой, проходящей через какие-либо две точки плоской сетки или пространственной решетки, возможною прямою, а всякую плоскость, параллельную плоскости, проходящей через какие-либо три точки пространственной решетки, — возможною плоскостью. На основании предыдущего заключаем, что всякая прямая, проведенная в возможном направлении через одну из точек системы, заключает в себе ряд равно отстоящих точек, а всякая возможная плоскость, проходящая через одну из точек системы, заключает в себе плоскую сетку.

Примем за оси координат на плоскости две возможные прямые, и притом за единицы — промежутки ряда на этих прямых; при этих условиях параметрами какого-нибудь направления мы будем называть относительные величины координат; понятно, что отношение координат будет одно и то же для всех прямых данного направления на плоскости.

Легко видеть, что возможные направления на плоскости будут иметь рациональные параметры. В самом деле, проведем через все точки плоской сетки прямые, параллельные осям координат; через это данная плоскость разделится на систему равных параллелограмов. Всякая возможная прямая, проходящая через одну из точек системы, будет заключать в себе ряд равно отстоящих точек, а притом каждые две из этих точек будут замыкать диагональ какого-нибудь параллелограма системы, стороны которого параллельны осям координат, а следовательно, отсекать на осях целое число промежутков ряда.

Совершенно подобным же образом мы докажем рациональность параметров возможных плоскостей, если за оси координат примем три возможные прямые пространственной решетки.

Теперь перейдем к изучению отношения систем точек к соответствующим системам параллелогонов и параллелоэдров.

Начнем с фигур на плоскости. Нам уже известно, что существуют только двоякого рода параллелогоны — ди- и трипараллелогоны. Наиболее правильными представителями этих фигур посредством сдвигов и растяжений мы можем получить бесчисленное множество других, которые, в свою очередь, обратными сдвигами и растяжениями могут быть снова превращены в квадрат и правильный шестиугольник. Все эти фигуры будут параллелогонами, и притом обладать тем свойством, что посредством сдвигов и растяжений они могут быть превращены в квадрат и правильный шестиугольник. Такие фигуры мы будем называть нормальными. Кроме этих, могут существовать, однако, и иного рода параллелогоны, которые мы будем называть аномальными и которые посредством сдвигов и растяжений не могут быть превращены в правильные. Из правильных фигур мы можем вообще произвести аномальные с теми же углами, если удлиним одну или несколько параллельных сторон так,

чтобы каждые две параллельные стороны оставались равными. Если мы это сделаем с квадратом, то получим прямоугольник, который, однако, посредством одного растяжения всегда может быть превращен в квадрат, а потому аномальных дипараллелогонов не существует вовсе. Если же мы этому процессу подвергнем правильный шестиугольник, то получим фигуру с равными углами, но неравными сторонами, а такая фигура — тоже трипараллелогон, уже посредством сдвигов и растяжений не может быть превращена в правильный шестиугольник. А потому каждая такая фигура, а также и все другие, получающиеся из нее посредством сдвигов и растяжений, будут аномальными трипараллелогонами.

Нетрудно убедиться, что как в параллелогональной системе квадратов, так и в системе правильных шестиугольников стороны параллелогонов имеют возможные направления, а следовательно, и рациональные параметры по отношению к двум каким-либо возможным прямым, принятым за оси координат. Что же касается аномальных трипараллелогонов, то они вообще этим свойством не обладают.

Стороны дипараллелогонов параллельны соответственным направлениям, и потому, если две прямые в этих направлениях мы примем за оси координат, то параметры дипараллелогонов будут $(1 : \infty)$; каждое из чисел мы должны сначала относить к одной и затем к другой оси координат.

Если в системе правильных шестиугольников мы примем за оси координат два каких-нибудь соответственных направления (уг. 60°), то, как нетрудно вывести, параметр $(1 : +1)$ представит собою третье соответственное направление, а параметры $(1 : -1)$ и $(1 : +2)$ выразят собою направления сторон шестиугольника. То же относится, конечно, и ко всякой системе нормальных трипараллелогонов.

Система точек каждой данной плоской сетки может быть принята за систему соответственных точек бесконечного множества различных нормальных ди- и трипараллелогонов.

В самом деле, проведем через точку данной плоской сетки произвольную возможную прямую. Прямая эта будет заключать в себе ряд равно отстоящих точек данной системы; если взятую прямую мы будем передвигать в параллельном положении до тех пор, пока она не встретит хоть одной точки данной системы, то, так как прямая эта имеет возможное направление, в ней опять будет заключаться ряд равно отстоящих точек и притом ряд, тожественный с первым, — это будет его ближайший ряд. Если через первоначально взятую точку и произвольную точку ближайшего ряда мы снова проведем прямую, то получим другое возможное направление. Если теперь через все точки системы проведем прямые в обоих направлениях, то получим систему равных параллелограмов,

которую посредством сдвигов и растяжений можем превратить в систему квадратов или таких параллелограмов, углы которых имеют величину 60 и 120°. Первую систему точек мы можем принять за систему соответственных точек квадратов, а вторую — за систему соответственных точек правильных шестиугольников. Построив системы этих фигур и подвергнув их обратным сдвигам и растяжениям, мы всякий раз снова придем к данной плоской сетке, как системе соответственных точек нормальных ди- или трипараллелогонов.

То, что мы сейчас вывели относительно нормальных параллелогонов, приложимо и к аномальным. В самом деле, построив систему произвольных аномальных трипараллелогонов и в ней систему соответственных точек и параллелограмов, мы, посредством сдвигов и растяжений, всегда можем перейти от данной системы точек к системе точек только что упомянутых трипараллелогонов; обратные же сдвиги и растяжения приведут нас снова к данной системе точек, как системе соответственных точек аномальных трипараллелогонов.

Совершенно аналогичные определения и заключения мы можем сделать и по отношению к пространственным решеткам.

Наиболее правильными представителями параллелоэдров являются куб, ромбический додекаэдр, особый притупленный октаэдр и прямая призма с основанием — правильным шестиугольником. Все эти фигуры, а равно и те, которые получаются из них посредством сдвигов и растяжений, мы назовем нормальными параллелоэдрами. Если же удлиним один или несколько поясов каждой из этих фигур, то получим фигуры с теми же гоноэдрами, двугранными и плоскими углами, как у нормальных, но они уже посредством сдвигов и растяжений вообще не могут быть превращены в наиболее правильные представители параллелоэдров. Трипараллелоэдр, подобно дипараллелогону на плоскости, не может быть аномальным, так как посредством сдвигов и растяжений всякий параллелепипед может быть превращен во всякий другой. Гексапараллелоэдр представляет ту особенность, что удлинение его вторичного, дипараллелогонального пояса приводит к новой фигуре, в которой является первичный дипараллелогональный пояс. Эта фигура — удлиненный гексапараллелоэдр — не может быть, по условию его образования, нормальным параллелоэдром.

Аналогично сторонам параллелогонов на плоскости, грани нормальных параллелоэдров также всегда принадлежат возможным плоскостям системы и имеют, вообще, простейшие параметры, а именно, параметры куба (а также и его соответственных плоскостей), если за оси координат примем его соответственные направления, будут $(1 : \infty : \infty)$; параметры прямой гексагональной призмы, а равно и всех нормальных тетрапараллелоэдров и их соответственных плоскостей, если за оси координат

примем главную ось и какие-нибудь два других соответственных направления, будут $(\infty : \pm 1 : \pm 1)$, $(1 : \infty : \infty)$ и $(\infty : +1 : +2)$; однако во всех этих трех случаях первое число нужно принять за координату по главной оси. Параметры ромбического додекаэдра, а равно и всех нормальных гексапараллелоэдров, если за оси координат примем его главные оси, будут $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1)$ и $(1 : \infty : \infty)$; наконец, параметрами особого притупленного октаэдра, а равно и всех нормальных гептапараллелоэдров, если за оси координат примем главные оси, будут $(1 : \infty : \infty)$ и $(\pm 1 : \pm 1 : \pm 1)$, а его соответственных плоскостей (которые, как нам известно, параллельны граням ромбического додекаэдра), будут $(\pm 1 : \pm 1 : \infty)$.

Рассуждениями, совершенно аналогичными тем, которые приведены относительно систем параллелогонов, мы докажем, что и точки каждой пространственной решетки могут быть приняты за соответственные точки бесчисленного множества всякого рода параллелоэдров и притом как нормальных, так и аномальных.

ОТДЕЛ V

О МНОГОГРАННИКАХ С ВОГНУТЫМИ УГЛАМИ, ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ ИЛИ КАЖУЩИМИСЯ

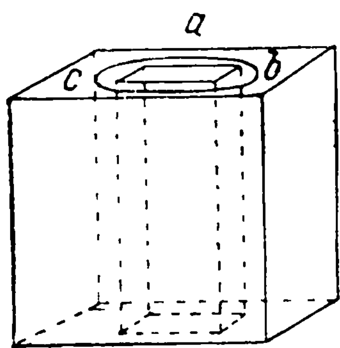


Глава 14

КОЙЛОЭДРЫ

§ 85. Теперь мы изучим математические отношения между элементами многогранников, имеющих вогнутые двугранные углы. Как было упомянуто раньше, мы всегда можем такие многогранники разложить на совокупность выпуклых; поэтому обратно они могут быть произведены совокупностью выпуклых многогранников. Посмотрим, как к такой совокупности относится формула Эйлера. Предположим, что мы совокупляем два выпуклых многогранника по некоторой общей грани наименования m; при этом, от сложения, выпадают две грани, m ребер и m вершин, и, значит, новое отношение между элементами, если сюда можно приложить формулу Эйлера, выразится $(r+r'-m)+2=(f+f'-2)+(n+n'-m)$; на самом же деле мы имеем $r+2=f+n$ и $r'+2=f'+n'$; складывая, получаем $(r+r')+2+2=(f+f')+(n+n')$; эта формула действительно тожественна с предположенною, и потому к такой совокупности двух многогранников можно приложить формулу Эйлера; очевидно, вывод этот мы можем распространить на совокупность скольких угодно составленных по этому закону многогранников. Но при этом m должно быть не меньше 3; если бы $m=2$, т. е. многогранники совокуплялись по общему ребру, и также если бы $m=1$, т. е. многогранники совокуплялись по общей вершине, наконец, в случае $m=0$, т. е. когда многогранники вовсе не сово-

куплются, — то легко видеть, что во всех этих случаях уже нельзя приложить формулы Эйлера. Но такие совокупности нельзя и рассматривать геометрически как отдельные многогранники. Точно также формула Эйлера не применима и в следующем случае: возьмем ряд многогранников, совокупленных по указанному закону, но загибающийся и снова сливающийся еще в каких-нибудь гранях.[1]) Вообще формула Эйлера прилагается для всех многогранников со сплошною поверхностью, если мы дадим им следующее определение: многогранник будет со сплошною поверхностью, если, проведя по поверхности многогранника произвольный сплошной контур, мы найдем, что он разделит поверхность фигуры на две отдельные части, и, следовательно, через него можно провести кривую поверхность, которая не пересекала бы поверхность фигуры в каком-нибудь другом месте; как пример, не удовлетворяющий этому условию, мы приведем полый куб, изображенный на фиг. 125, который, если мы рассечем, по определению, поверхностью, проходящей через кривую abc, то обязательно пересечем многогранник, кроме этого контура, еще по какому-нибудь другому.[2]) Так как многогранники с несплошною поверхностью ускользают от



Фиг. 125.

[1]) Указанием на многогранники, не подчиняющиеся формуле Эйлера, и даже отчасти их классифицированием занимались многие авторы. Укажу, например, на Льюильера (Lhuilier, Ann. de Gergonne, т. 3, стр. 169), различившего три разряда фигур такого рода, Гесселя (Hessel, Crelle Journ., т. 8, стр. 13); наконец, из более новых, на Хоппе (Hoppe, Grunert Arch., т. 63, стр. 100).

[2]) Из сказанного ясно, что нужно отбросить принятое некоторыми авторами определение так называемых эйлеровых многогранников как многогранников выпуклых; так как эйлеровыми многогранниками следует называть те, к которым применима формула Эйлера, то сюда войдут также и койлоэдры. Приведенное определение совершенно совпадает с определением К. Жордана: „. . .les polyèdres tels que tout contour fermé tracé sur leur surface et ne se traversant par lui même divise cette surface en deux régions separées“ [83] (Borchard Journ., т. 66, стр. 35).

всякого точного определения, то и не подлежат общему геометрическому изучению. Многогранники же со сплошной поверхностью для простоты мы будем называть койлоэдрами. Вместе с формулой Эйлера к койлоэдрам применимы и все другие, выведенные нами формулы (1)—(24) в гл. 4.

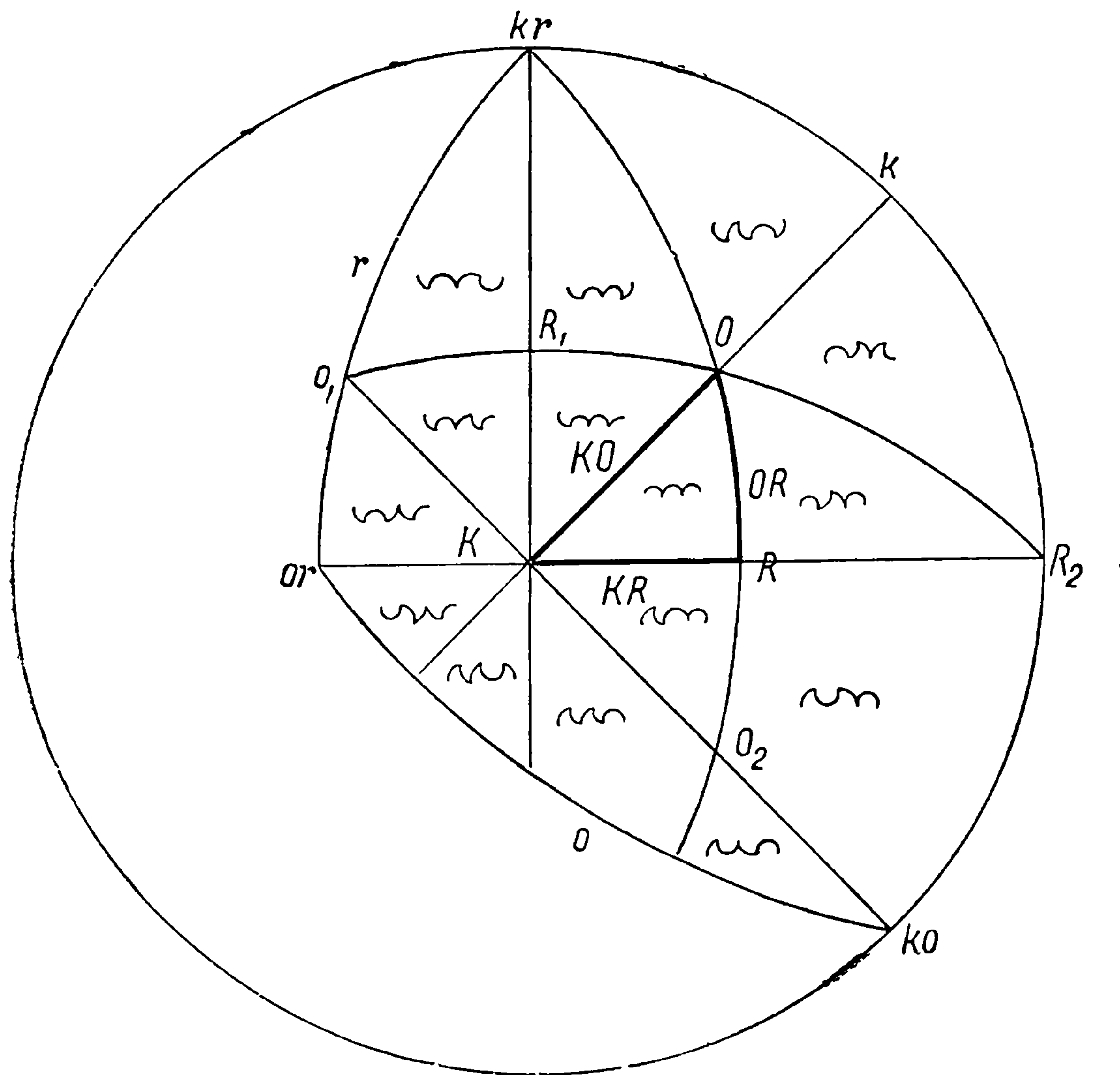
Для определения положения какого-нибудь многогранника в системе мы строили его типический представитель. Это не применимо непосредственно к койлоэдрам, так как всякий собственно типический многогранник будет непременно выпуклый. Но мы можем представить себе, что продолжения граней какого-нибудь койлоэдра будут касательны к шару. Такие койлоэдры мы уже только условно можем называть типическими. Но от типических койлоэдров всегда можно перейти к настоящим типическим многогранникам той же разновидности, если за грани мы будем принимать те их части, внутри которых находится точка касания и которые очерчиваются пересечением со смежными гранями. Таким образом, если существует какой-нибудь типический койлоэдр, то непременно существует и типический многогранник той же разновидности; поэтому разновидность может опять подразделяться; такие подразделения мы будем называть ***формами;*** значит, типические койлоэдры суть только различные формы типических изоэдров. Такие койлоэдры, грани которых равны, мы будем называть *изокойлоэдрами.*

Нетрудно убедиться, что точки касания типических изокойлоэдров суть точки соответственные. Для доказательства достаточно было бы повторить вывод теоремы 15 II отдела, так как все различие обоих случаев заключается лишь в положении соответственной точки — в одном случае внутри, в другом — вне грани.

Эта теорема приводит, однако, к весьма интересному выводу, а именно, что типические изокойлоэдры суть формы типических изоэдров и что поэтому, как их вывод, так и все условия симметрии одинаковы с выпуклыми формами.

§ 86. Теперь мы и займемся выводом всех важнейших систем типических изокойлоэдров, начиная с системы кубо-октаэдрической.

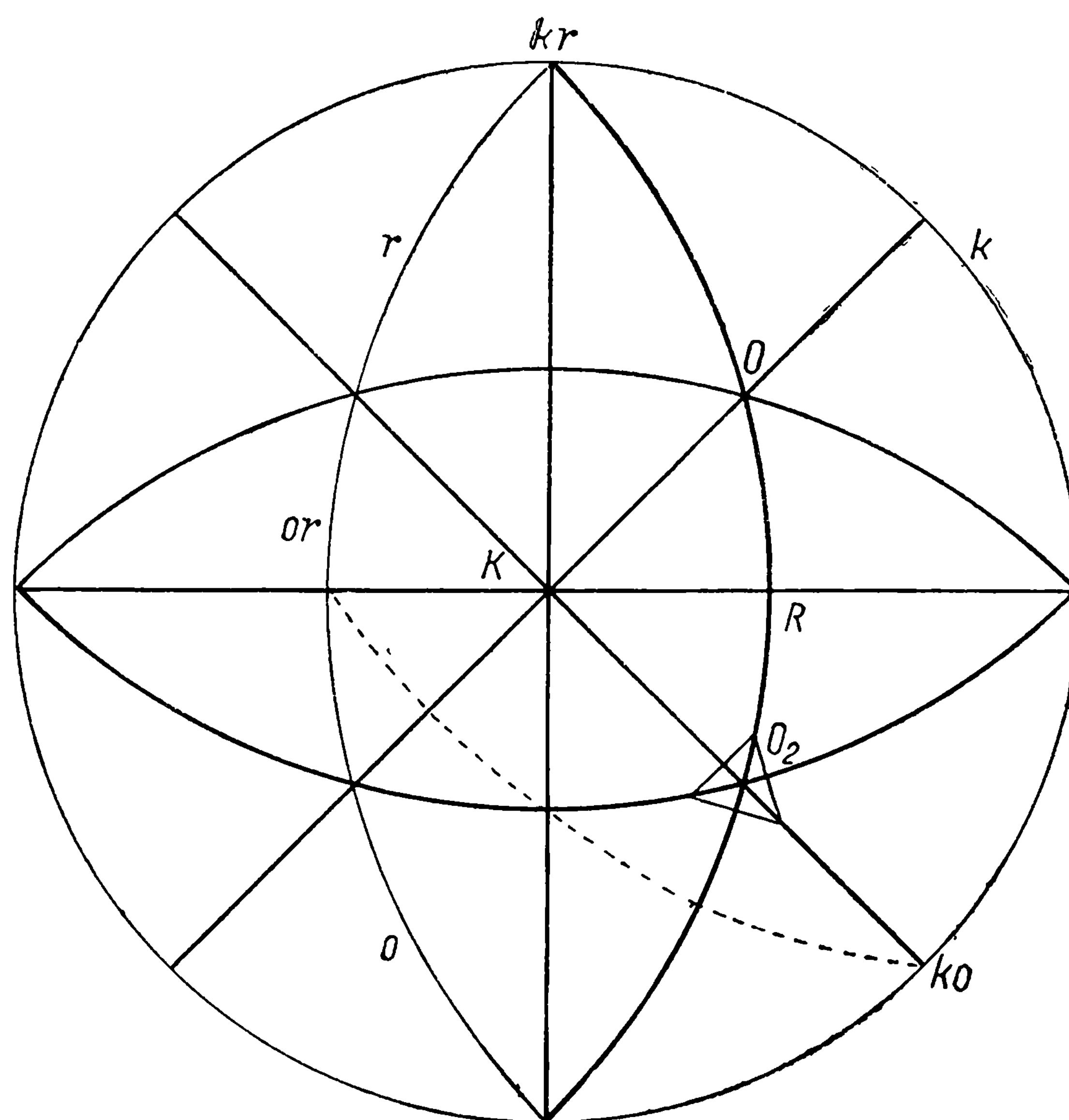
Ясно, что мы получим типический изокойлоэдр, если, взяв на сфере, где-нибудь вне основного гоноэдра, точку, примем ее за точку касания и проведем через нее касатель-



Фиг. 126. Многогранники гомоэдрического отделения кубо-октаэдрической системы.

ную плоскость, а за грань койлоэдра примем фигуру пересечения ее с гранями основного гоноэдра. Очевидно, однако, что не всякая точка на сфере может служить для этой цели, так как можно предположить на сфере столь удаленную точку, что касательная к ней грань не пересечет граней, одной или нескольких, основного гоноэдра. Отыщем пределы таких точек. Легко видеть, что пределами этими для основного гоноэдра кубо-октаэдрической системы *KOR* (очер-

ченного толстой линией, фиг. 126[1]) будет дополнительный тригоноэдр *kr.ko.or*. В пределах этого дополнительного гоноэдра все точки могут быть точками касания типических изокойлоэдров. Плоскости, касательные к точкам, образующим его стороны, будут параллельны соответственным ребрам основного тригоноэдра, и, следовательно, такой изокойлоэдр



Фиг. 127.

будет представлять систему лучей (а именно осей симметрии), если касательные плоскости мы перенесем в параллельном положении к центру. Плоскости же, касательные к вершинам основного тригоноэдра, и потому самый изокойлоэдр, при только что выраженном условии будут представлять собою

[1]) **Фиг.** 126 представляет собою лишь часть **фиг.** 127, в которой показано (в стереографической проекции) разделение сферы на элементарные гоноэдры гомоэдрического отделения кубо-октаэдрической системы.

систему центральных плоскостей (а именно плоскостей симметрии).

За пределами этого дополнительного гоноэдра точек, для построения типического изокойлоэдра, брать очевидно нельзя.

Так как сумма плоских углов ΣP основного гоноэдра равна $1\frac{1}{2}d$,[1]) то величина этого дополнительного будет $2d - \frac{\Sigma P}{2} = 1\frac{1}{4}d$, а так как при этом величина основного гоноэдра $\frac{1}{12}d$, то ясно, что дополнительный или предельный гоноэдр будет в 15 раз больше основного, что легко видеть из фигуры, в которой сфера представлена разделенною на элементарные гоноэдры.

Нетрудно видеть, что те изокойлоэдры, которые построены из соответственных точек системы элементарных гоноэдров, будут представлять лишь различные формы друг друга, а также и типического изоэдра, построенного из такой же соответственной точки, но взятой внутри основного гоноэдра. Рассматривая схему с этой точки зрения, мы видим, что из трех предельных фигур только две имеют вогнутые формы, а именно октаэдр (точка O_2) и ромбический додекаэдр (точка R).

Легко видеть также, что формы одной и той же фигуры, построенные из различных соответственных точек, будут вообще, видимо, различаться между собой, а именно различие это будет выражаться в вогнутости и выпуклости различных двугранных углов и углов между смежными ребрами. Таким образом, вогнутыми или выпуклыми могут быть двугранные углы, а также плоские углы между смежными ребрами, находящимися в одной и той же плоскости (симметрии).

---

1) Это легко вывести элементарным путем: основной гоноэдр KOR дополнителен гоноэдру изогона, притупленного кубо-октаэдра, представляющего собою зоноэдр, для которого $\Sigma G = 2d(n-2p) = 2d(48-2\cdot 9) = 60d$, а искомая суммма определится из равенства $\frac{60d}{48} = 2d - \frac{\Sigma P}{2}$, откуда $\Sigma P = \frac{3d}{2}$.

Для наивозможно краткого означения этих различий мы примем для выпуклости букву „v“, а для вогнутости — букву „c“. В случае же, если отмечаемые углы образуют одну плоскость или одну прямую, мы будем ставить букву „o“, что означает отсутствие как выпуклости, так и вогнутости.[1]) Для характеристики мы будем совокуплять ряд этих условных знаков в одной строчке по условленному порядку. Теперь же нужно определить, сколько именно знаков необходимо для определения всякой возможной фигуры этой системы.

Ясно, что дуга большого круга, проходящая через *KO* (фиг. 126), разделит сферу и наш предельный гоноэдр на две части. В той части, в которой находится основной гоноэдр *KOR*, все точки произведут койлоэдры с выпуклыми двугранными углами, ребра которых находятся в одной плоскости с нашей разделительной дугой. В самом деле, эта плоскость есть не что иное, как плоскость симметрии койлоэдра, и притом проходит через ребро исследуемого двугранного угла. Следовательно, дуга эта будет *разграничительною линией* по отношению к вогнутости или выпуклости указанных двугранных углов. Очевидно, что для всех точек, находящихся на этой дуге, по отношению к указанным двугранным углам придется поставить букву „o“.

Совершенно то же самое приходится сказать и о дугах, проведенных через *KR* и *RO*. Первые три знака и будут относиться к этим двугранным углам, как это сделано на фиг. 126, т. е. первые три знака по порядку будут: 1) соответственно разграничительной линии, проходящей через *KO*, 2) линии *KR*, 3) *RO*.

Но этими тремя знаками не ограничивается выражение того видимого разнообразия, которое представляют собою

[1]) На таблицах выпуклость означается четвертью круга, обращениого выпуклостью кверху, вогнутость — четвертью круга, обращенного вогнутостью кверху;[84] по причине типографских затруднений такое обозначение не могло быть проведено в тексте.

типические изокойлоэдры. Чтобы понять это, мы исследуем, отчего будут зависеть знаки всех упомянутых выше плоских углов между смежными ребрами. Число этих углов будет 6, а именно по 2 около каждой вершины гоноэдра.

Начнем с углов, имеющих вершину в точке K. Что касается угла, находящегося в плоскости KO, очевидно, что разграничительной линией для его означения будет дуга O_1KO_2, т. е. дуга, перпендикулярная к первой. Это ясно из изложенных выше соображений. Точно также ясно, что разграничительной линией по отношению к углу, находящемуся в плоскости KR, будет дуга R_1K, по той же причине.

Перейдем теперь к углам, имеющим вершину в точке R. Здесь, совершенно подобно предыдущему, разграничительными линиями по отношению к плоским углам будут дуги, находящиеся в плоскостях, перпендикулярных первым, т. е. в данном случае разграничительные линии по отношению к плоским углам будут совпадать с такими же линиями по отношению к двугранным углам KR и OR.

Перейдем, наконец, к углам, имеющим вершиной точку O. Решим сначала вопрос, в каких случаях образуются вогнутые и выпуклые углы между ребрами в плоскости KO. Для его решения возьмем произвольный радиус-вектор внутри какого-нибудь элементарного гоноэдра, например, $kr.O.R_1$, принимая, что соответствующая ему грань ограничена гранями основного гоноэдра; это допущение обусловит положение ребра в плоскости KO; для того, чтобы получить определенное положение другого ребра той же плоскости, возьмем, например, грань в пределах гоноэдра $kr.O.k.$; нетрудно найти, что точка касания этой грани должна находиться в пределах гоноэдра KOR_1, и, значит, угол между искомыми ребрами будет вогнутый. Но если мы возьмем точку не внутри гоноэдра, а на его грани R_1O, то нетрудно убедиться, что с нею сольется и соответственная точка, определяющая знак искомого угла между ребрами. Таким образом, мы найдем,

что $O_1R_1OR_2$ и будет разграничительной линией для рассматриваемых углов.

Приняв во внимание, что через O проходит тройная ось симметрии, мы найдем, что та же линия служит разграничительной линией по отношению к обоим другим углам между смежными ребрами, встречающимися в точке O и находящимися в одной и той же плоскости.[1]) Таким образом, мы нашли шесть разграничительных линий по отношению к рассматриваемым нами элементам, и, следовательно, означение каждого изокайлоэдра этой системы требует шести знаков, а именно, кроме трех, указанных выше, будут еще: 4) соответственно разграничительной линии KO_1 и знак выражает собою качество плоского угла при вершине K и в плоскости KO; 5) соответственно разграничительной линии KR_1 и знак выражает собою качество плоского угла при вершине K и в плоскости KR; наконец 6) соответственно разграничительной линии OR_1 и знак выражает собою одновременно качество плоских углов при вершине O во всех трех плоскостях. Соответственно указанному началу и сделаны обозначения на фиг. 126.

Сравнивая эти знаки с номерами гоноэдров, выставленными на фиг. 132, мы видим, что одни знаки не вполне соответствуют другим, а именно изокойлоэдрам, имеющим №№ *5* и *11*, а также *9* и *13*, соответствуют одинаковые знаки, т. е. они имеют видимую одинаковость; поэтому, на фиг. 126 номера эти и не разграничены.

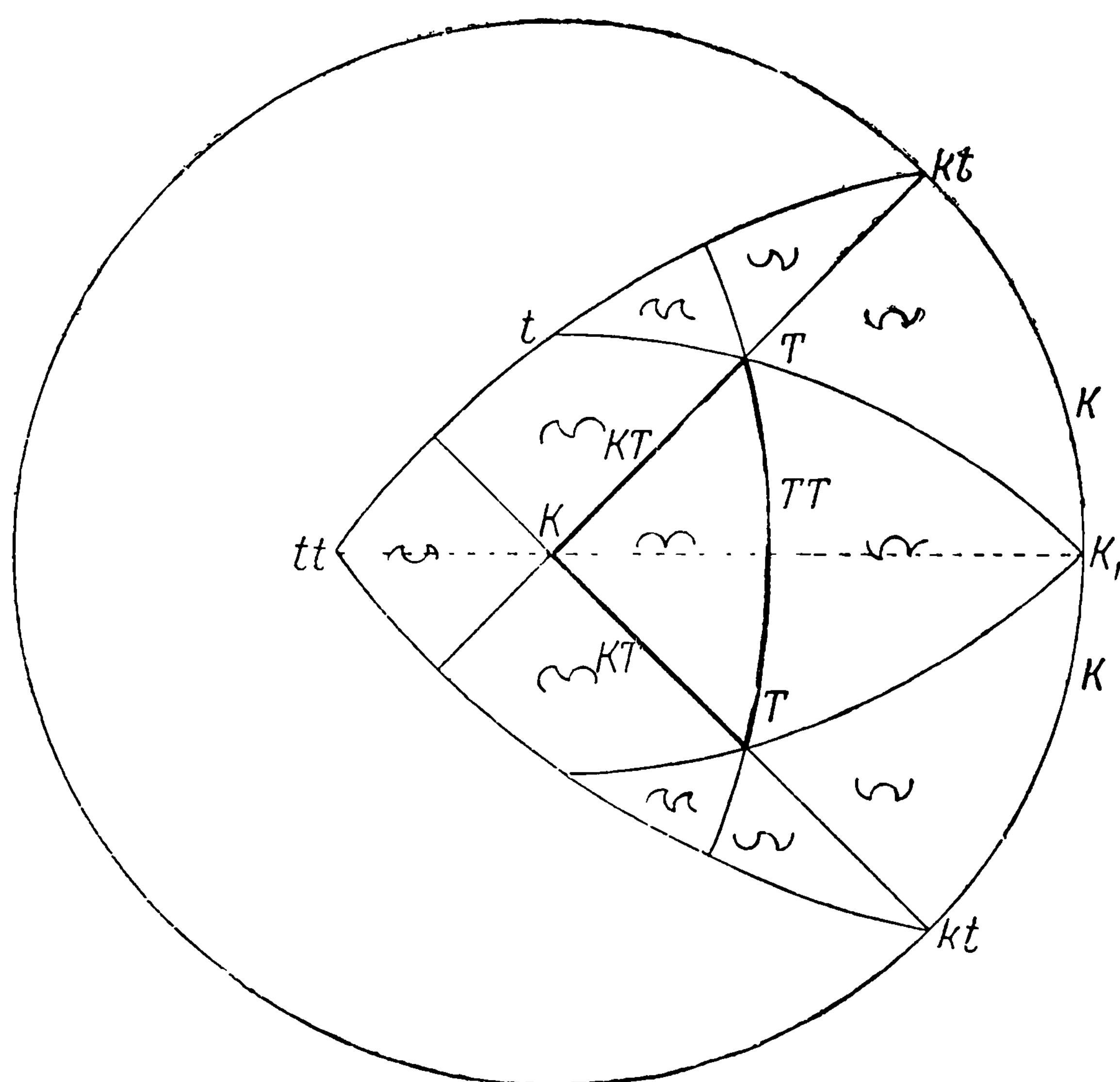
Для иллюстрации сделанных выводов по отношению к этой системе мы приложили в конце таблицу изокойлоэдров, расположение которых, однако, не вполне соответствует только что указанному и будет объяснено в следующей главе; но подписанные под каждой фигурой номер и обозна-

---

[1]) Другими словами, если один из плоских углов между ребрами, имеющими вершину в точке O, вогнутый, то вогнутыми будут и все остальные.

чение вполне определяют их место по отношению к фиг. 126 и 132.

§ 87. Переходя к тетраэдрическому отделению той же системы, мы не встречаем никаких новых затруднений и на основании указанных раньше способов приходим к необходимости только четырех знаков. Все эти означения вместе с разграничительными линиями представлены на фиг. 128.



Фиг. 128. Многогранники тетраэдрического отделения кубо-октаэдрической системы.

В этом отделении мы наталкиваемся только на ту особенность, что одни и те же знаки повторяются тут два раза и располагаются симметрично по отношению к линии KK_1. Но это и следовало ожидать в силу известного свойства фигур этого отделения являться всегда в двух симметричных видоизменениях.

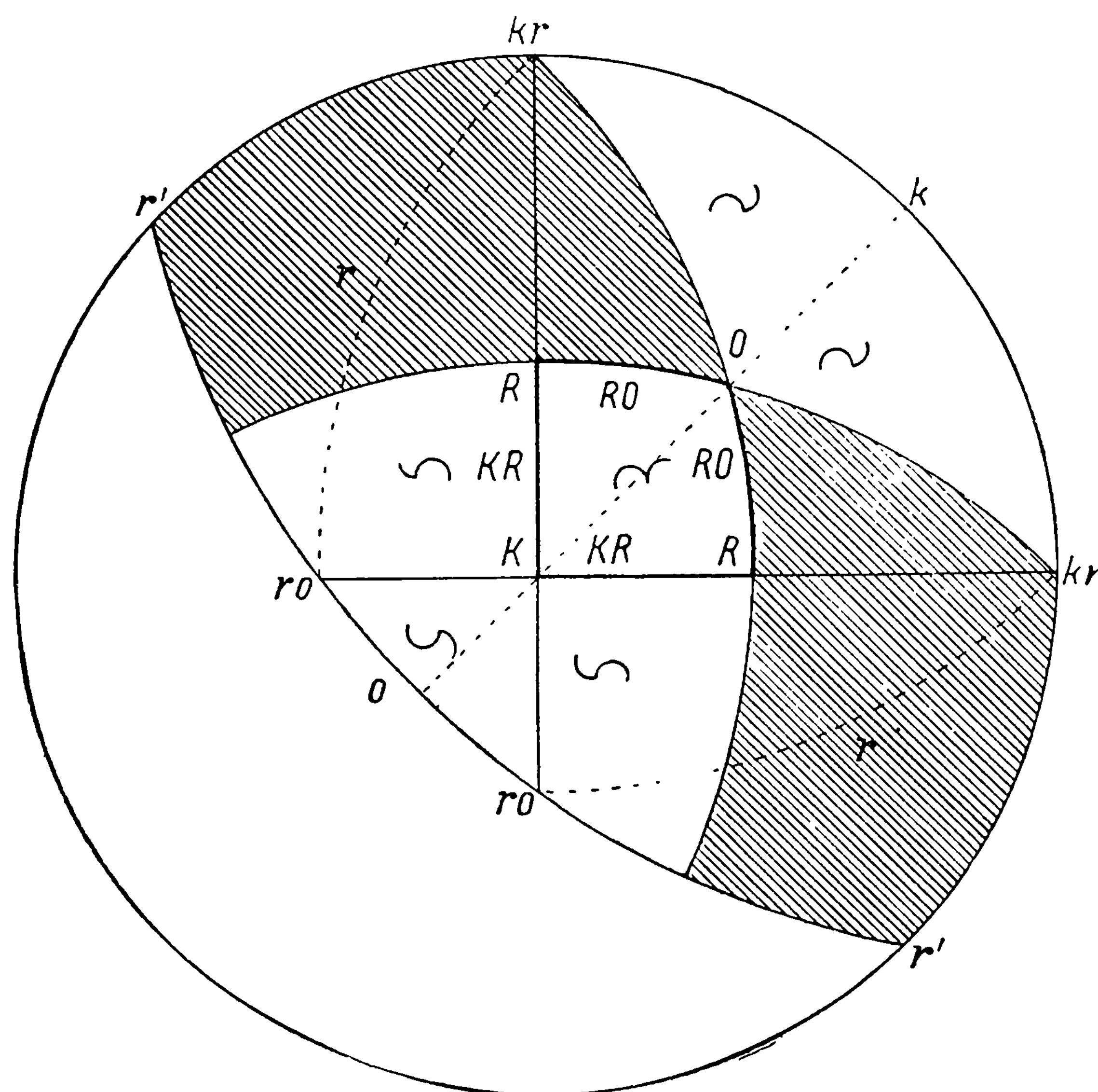
Здесь первый знак относится к разграничительной линии TT, второй и третий — к одной из линий KT, смотря по тому,

в какой половине взяли мы для построения соответственную точку, в половине ли, находящейся на чертеже выше или ниже линии $tt.KK_1$, так что для каждой половины будет и иная последовательность 2-го и 3-го знаков, как видно из сделанного на фигуре обозначения. Наконец, четвертое обозначение относится к одной из линий TK_1; так как линии эти целиком находятся в одной из половин, то, очевидно, нет никакой надобности в особых для каждой из них обозначениях.

Подобно тому, как в гомоэдрическом отделении, и здесь легко найти величину дополнительного гоноэдра *tt.kt.kt*, который, очевидно, будет равен гоноэдру изогона — притупленного октаэдра, т. е. равен *d*, почему этот дополнительный гоноэдр будет в 6 раз больше основного, в чем нетрудно после некоторого соображения убедиться и из чертежа.

§ 88. Нечто новое встречаем мы, когда переходим к изучению додекаэдрического отделения этой системы. Здесь, как нам известно, элементарный гоноэдр представляет величину изменяющуюся, и притом возможные решения находятся лишь на дугах, делящих угол *ROR* пополам (фиг. 129). Вместе с основным гоноэдром изменяется и дополнительный, так что построение этого последнего приходится произвести на иных основаниях, а именно, в нем остаются неизменными лишь две стороны *kr.k.kr*, соответственно постоянной вершине *K* основного, и сторона *ro.o.ro*, соответственно постоянной вершине *O*. Две же другие стороны изменяют свое положение в пределах от *kr.ro* до *kr.r′*. Соответственно постоянным сторонам основного гоноэдра *KR*, в дополнительном остаются неизменными вершины *kr*. Дуга, равно делящая угол *ROR*, изменяет свое положение лишь в пределах самого этого угла, так как в противном случае сам основной гоноэдр вышел бы из своих пределов. Отсюда следует, что койлоэдров, соответствующих точкам, выходящим из указанных пределов равноделящей, и показанных на фиг. 129 заштрихованными, не существует вовсе. Поэтому

в этом отделении и не может существовать иных разграничительных линий, кроме линий *KR*. Исследуя необходимое число знаков, мы придем всего к трем и найдем, как и в предыдущей гемиэдрической системе, что совокупность всех изокойлоэдров разделяется на две равные половины,



Фиг. 129. Многогранники додекаэдрического отделения кубо-октаэдрической системы.

симметричные друг по отношению к другу; только плоскость симметрии здесь будет иная, а именно плоскость *KO*.

Первое и второе обозначение относится здесь к одной из линий *KR*, смотря по тому, в какой половине (по отношению к линии *KO*) возьмем мы для построения соответственную точку. Третье обозначение относится к одной из линий *OR*, причем здесь не требуется двух обозначений, потому что в каждой из половин только одна из них служит разграничительной линией.

§ 89. Наконец, легко видеть, что для гироэдрического и тетартоэдрического отделений кубо-октаэдрической системы изокойлоэдров вовсе не существует, так как для каждого основного гоноэдра имеется лишь одно возможное решение, соответствующее точке, находящейся внутри гоноэдра, т. е. решение настоящего типического изоэдра.

§ 90. Рассматривая обозначения фигур всех этих подразделений, мы видим, что они выражают не только изокойлоэдры, но и типические изоэдры. Мы выписываем их в следующей таблице, составленной на общем основании, но, конечно, не заключающей в себе знаков вогнутости.

Таблица означений выпуклых типических изоэдров кубо-октаэдрической системы

1. Отделение гомоэдрическое

Куб выражается знаком	oovoov
Октаэдр	ovovvo
Ромбический додекаэдр	voovvv
Триакис-октаэдр	ovvvvv
Пирамидальный куб	vovvvv
„ октаэдр	vvovvv

2. Отделение тетраэдрическое

Куб выражается знаком	voov
Тетраэдр	oovo
Ромбический додекаэдр	ovvv
Пирамидальный тетраэдр	vovv
Триакис-тетраэдр	ovvv

Мы видим, что здесь означения ромбического додекаэдра и триакис-тетраэдра одинаковы, и это вполне понятно по положению, занимаемому этими фигурами в этой системе.

3. Отделение додекаэдрическое

Куб выражается знаком	oov
Октаэдр	vvo
Ромбический додекаэдр	ovo
Пентагональный додекаэдр	ovv
Пирамидальный октаэдр	vvo

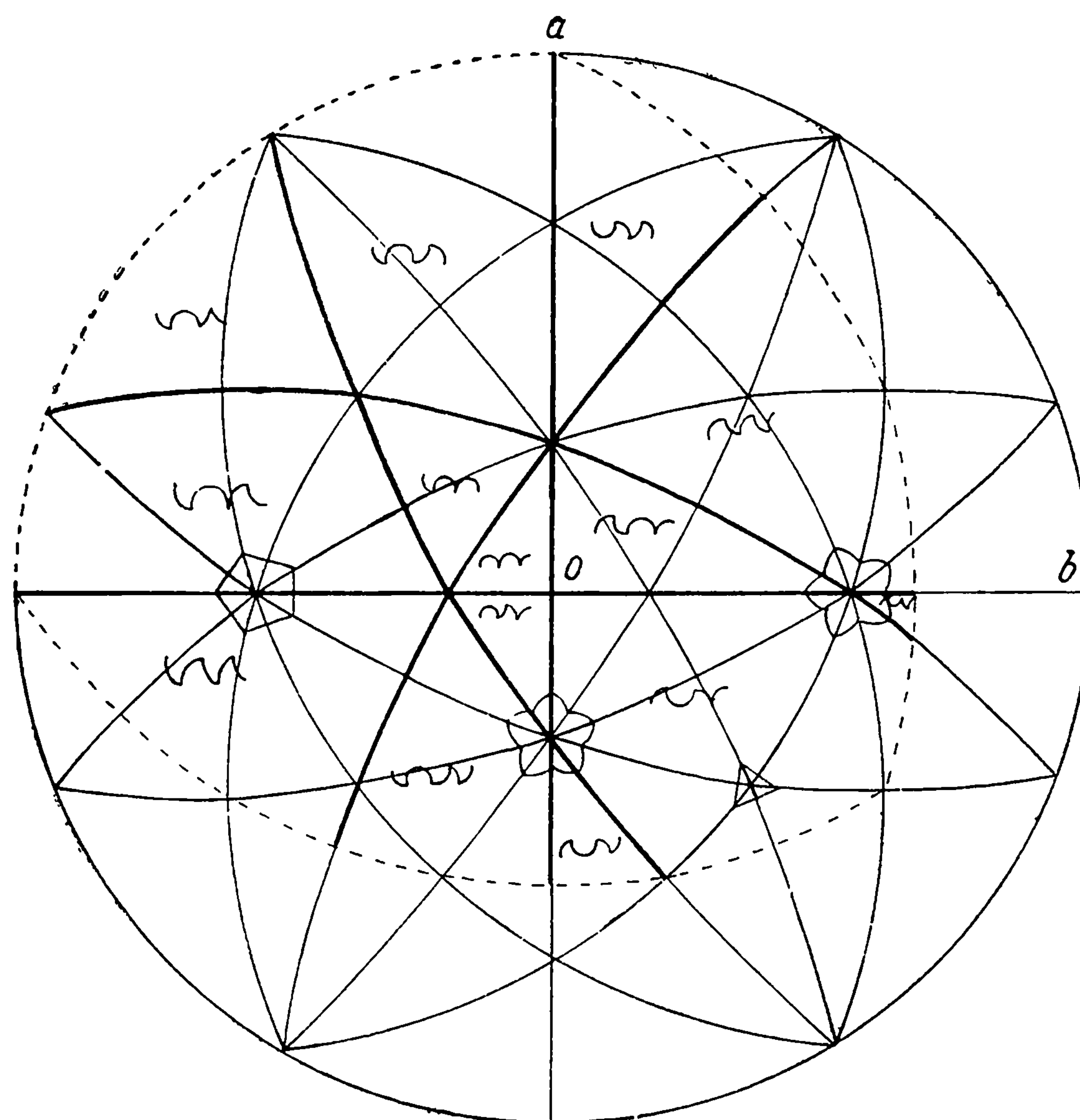
Здесь, как и в предыдущем случае, есть повторение знаков, а именно для октаэдра и пирамидального октаэдра. Это происходит вследствие отсутствия отметки по дуге KO.

§ 91. Можно предвидеть, что те же отношения мы встретим и в додекаэдро-икосаэдрической системе; а именно, для гомоэдрического отделения отношения аналогичны отношениям гомоэдрического же отделения предыдущей системы, а для гемиэдрического отделения мы встречаем то же, что в гиро- и тетартоэдрическом отделениях предыдущей системы, т. е. полное отсутствие изокойлоэдров. Сумма плоских углов основного гоноэдра равна d,[1]) а потому величина дополнительного $1\frac{1}{2}d$, а так как величина основного $\frac{d}{30}$, то, значит, дополнительный гоноэдр в 45 раз больше основного. На фиг. 130 изображено разделение сферы на элементарные гоноэдры, а пунктиром означены стороны дополнительного; нетрудно проверить сделанный вывод и на чертеже, хотя и здесь, так же как в кубо-октаэдрической системе, стороны дополнительного пересекают многие элементарные гоноэдры. На этом чертеже толстыми линиями означены линии разграничительные, а основной гоноэдр легко узнается по знаку vvvvv.[85] Число разграничительных линий, так же как и элементов обозначения для этой системы, равно 5. Ясно, значит, что и формы этой системы опять-таки получают свое особое обозначение, под которое подходят и выпуклые, как это видно из следующей таблицы:

---

[1]) Основной гоноэдр дополнителен гоноэдру изогона — притупленного додекаэдро-икосаэдра, для которого $\Sigma G = 2d(n-2p) = 2d(120-2\cdot 15) = 180d$ или $\frac{180}{120}d = 2d - \frac{\Sigma P}{2}$ откуда $\Sigma P = d$.

Додекаэдр выражается знаком . . . . oovov
Икосаэдр . . . . ovovo
Ромбический триаконтаэдр . . . . voovv
Триакис-икосаэдр . . . . ovvvv
Пирамидальный додекаэдр . . . . vovvv
" икосаэдр . . . . vvovv



Фиг. 130. Многогранники гомоэдрического отделения додекаэдро-икосаэдрической системы.

При этом обозначении подразумевается, конечно, известный порядок, выбранный, однако, вполне аналогично примененному для предыдущей системы, так что говорить о нем здесь не приходится.

§ 92. По выведенным только что правилам нетрудно найти все возможные изокойлоэдры и для какой угодно из рядовых систем. Но это завело бы нас слишком далеко. Достаточно упомянуть, что число изокойлоэдров в каждой системе увеличивается вместе с самим наименованием си-

стемы и что для тех гемиэдрий и тетартоэдрий, в которых каждой точке соответствует особый элементарный гоноэдр, изокойлоэдров вовсе не существует по той же причине, как и в гемиэдрическом отделении только что рассмотренной системы, и т. п.

Аналогично тому, что здесь выведено относительно койлоэдров, может быть сделано и по отношению к плоским фигурам. Самые фигуры мы будем называть койлогонами.

Глава 15

МНОГОУГОЛЬНИКИ И МНОГОГРАННИКИ ВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ[1]

§ 93. Многоугольником первой степени называется такой, что если внутри его площади возьмем произвольную точку и из нее проведем прямую, пересекающую периметр один

[1] По вопросу об этих фигурах имеется довольно большая литература, особенно по вопросу о многоугольниках, которые получили название звездчатых. Литература эта довольно полно собрана в статье Г. Достора (G. Dostor. Théorie genérale des polygones étoilés. Liouville Journ., серия 3, т. 6, стр. 342). В ней, однако, упущены некоторые немецкие работы. Во всяком случае, начало сведений по этому предмету относится к глубокой древности. См. также: Ващенко-Захарченко. Начала Эвклида, стр. 283.

Что касается многогранников высшей степени, из которых правильные получили название звездчатых, а вообще называются высшего порядка или рода (ordre, espèce, Art), то первые сведения о них приписываются Кепплеру (Harm. mundi, II, 26). Но можно сказать, что они обратили на себя внимание лишь со времени появления работы Пуансо (Poinsot, Journ. de l'Ec. polit., тетр. 10, стр. 39), после которой указанные им правильные многогранники получили название тел Пуансо. После этого мы имеем целый ряд работ по этому вопросу, например Коши (Cauchy, Journ. de l'Ec. polit., тетр. 16, стр. 68), Бертрана (Bertrand, C. r., 1858, стр. 79), ряд работ Г. Достора, Гесса и, наконец, работа Бадуро (Badoureau, Journ. de l'Ec. polit., тетр. 49, стр. 47).

Я употребляю для этих фигур термин „высшей степени“, ввиду того, что другие термины, как, например, „порядок“, „род“ и т. п. имеют в моем изложении совершенно другой, определенный смысл.

раз, то необходимо получится лишь одна точка пересечения. Если же можно провести такую прямую, чтобы она пересекала периметр в E точках, то такой многоугольник будет E-той степени, если E — наибольшее число точек пересечения, которое можно получить при этом условии.

Из этого определения выходит, что в многоугольнике E-той степени мы можем получить вообще E периметров, а именно, за первый принять самый внутренний и т. д., причем, конечно, части периметров различного порядка могут совпадать, и именно эти части периметра могут пересекаться в меньшем, чем E, числе точек. Значит, на многоугольник E-той степени мы можем смотреть, как на связанную периметрически совокупность из E многоугольников. Если же бы этой периметрической связи не было, то такой многоугольник представлял бы прямо совокупность E многоугольников.

Как всегда, заслуживают внимания лишь наиболее правильные фигуры, т. е. правильные в собственном смысле слова, или же фигуры равносторонние (типические) и равноугольные. Во всех трех случаях мы можем построить при центре многоугольника систему равных углов, а именно в первых двух случаях систему центральных, а в последнем — центральных дополнительных углов. Вследствие множественности периметра сумма углов этих будет уже не $4d$, а в E раз больше; другими словами, степень многоугольника может

Хотя я и даю для этих фигур иное определение, чем то, которое принято им давать со времени Пуансо, но вообще определения эти совпадают в своих приложениях, как это можно видеть из совпадения формул других авторов и моих; мое определение лишь устраняет те недоразумения, которые в этом отношении общи всем авторам, занимавшимся этим предметом, и которые ведут за собою нарушение общности и гармонии выводов. Так, например, правильный звездчатый шестиугольник, по моему определению, должен быть необходимо шестиугольником второй степени, между тем как по другим авторам он рассматривается лишь как совокупность двух правильных трехугольников; но, благодаря такому воззрению, пропадает возможное по теории решение второй степени. Точно так же и октаэдр второй степени рассматривается другими авторами как совокупность двух тетраэдров, и т. п.

измеряться частным из суммы центральных углов на $4d$. Отсюда вытекает, что сумма внутренних углов такого многоугольника о m сторон будет иная, чем у m-угольника первой степени, а именно: так как отдельному углу при центре в обоих случаях соответствуют внутренние углы, сумма которых дополнительна до $2d$, то для получения полной суммы нужно помножить эту разность на m, т. е. $\Sigma P = m(2d - a)$, где a — отдельный центральный или центральный дополнительный угол; но так как сумма этих углов есть $E \cdot 4d$, где E — степень многоугольника, то $\Sigma P = 2d(m - 2E)$.

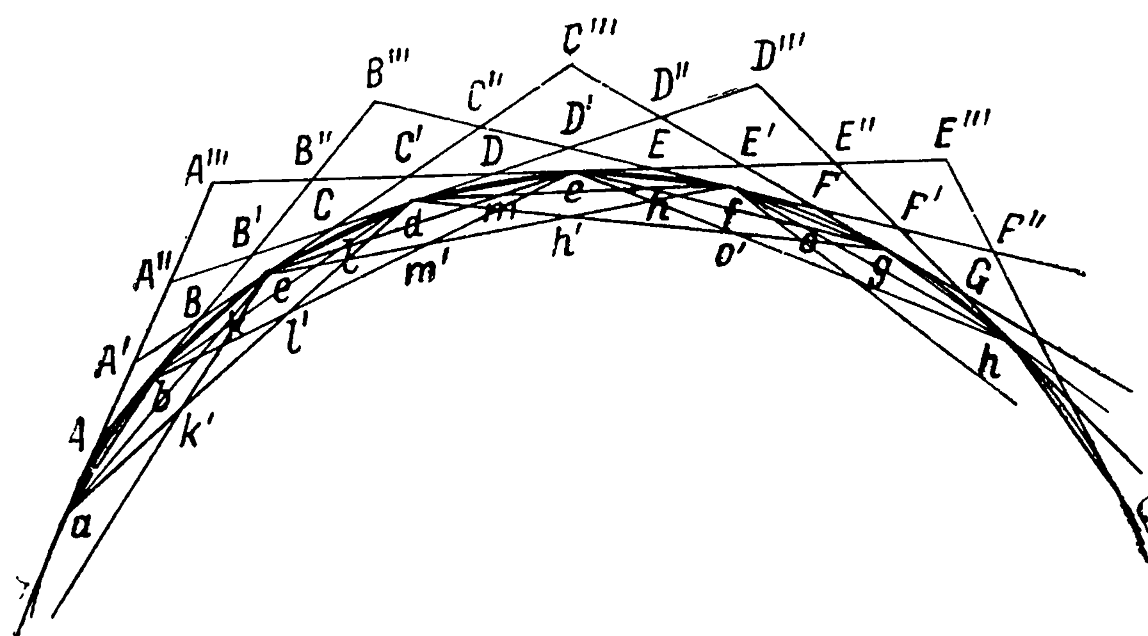
Из этой формулы заключаем, что чем выше степень многоугольника, тем меньше сумма внутренних его углов при том же числе сторон, что вообще степень должна быть меньше половины числа сторон и, значит, многоугольник второй степени не может иметь наименования ниже 5, многоугольник третьей степени — ниже 7 и т. д. В правильных многоугольниках внутренние углы равны, а следовательно, отдельный угол правильного m-угольника степени E будет $a = 2d\left(1 - \frac{2E}{m}\right)$.

Если мы возьмем какой-нибудь правильный m-угольник E-той степени, то нетрудно будет убедиться, что он составится из E койлогонов, и притом самый внутренний (ядро) представит собою обыкновенный правильный многоугольник, а следующие затем будут (типические) койлогоны с равными сторонами, и притом стороны (число которых $2m$) каждого следующего будут попарно сливаться со сторонами предыдущего, так что в результате получится снова m равных между собою сторон.

Теперь проследим соотношение между типическими правильными многоугольниками и им соответствующими подтипическими. Чтобы перейти от правильного многоугольника $ABCD\ldots$ к правильному же многоугольнику второй степени (фиг. 131), нужно продолжать смежные стороны, и мы получим многоугольник со сторонами $A'C'$, $C'E'\ldots$, $B'D'\ldots$,

$D'F'\ldots$ Но этот многоугольник мы можем получить от сложения взятого многоугольника $ABCD\ldots$ и койлогона $AA'BB'CC'\ldots$

Последней фигуре, рассматриваемой как типическая, будет соответствовать подтипическая фигура, вершины которой будут последовательно $bacbdc\ldots$ и, значит, кроме общей последовательности по часовой стрелке, линии kcb, $ldc\ldots$ очерчивают некоторые части площади по сторонам, имеющим направление, обратное часовой стрелке. Но, сложив взятый



Фиг. 131.

типический многоугольник с койлогоном $AA'BB'\ldots$, мы получим правильный многоугольник второй степени, а сложив многоугольник подтипический данному с подтипическим же $bacbdc\ldots$, мы, чтобы получить подтипический многоугольник второй степени, должны из площади первого вычесть части kcb, $ldc, \ldots$, а потому указанное отношение будет точно выражено, если части, имеющие направление сторон, обратное часовой стрелке, мы назовем отрицательными и их прибавление будем считать равносильным вычитанию. Таким же образом, от типического многоугольника второй степени прибавлением койлогона $A'A''B'B''\ldots$ мы придем к многоугольнику третьей степени, стороны которого будут $A''D''$, $D''G, \ldots$ Точно так же, если к многоугольнику подтипическому прибавим многоугольник $cadbec\ldots$, считая части

$k'ca$, $l'db$... отрицательными, то придем к правильному подтипическому многоугольнику третьей степени, и т. д.; при этом некоторые части вычитаются больше чем один раз.

На основании такого построения мы можем сказать, что степень соответственных типического и подтипического правильных многоугольников одинакова. Но это еще яснее следует из тожественности центральных углов первых с центральными дополнительными вторых, и, значит, если сумма первых $4d \cdot E$, то такая же будет и у вторых.

§ 94. Понятие о плоских многоугольниках высшей степени мы без труда можем перенести и на сферические многоугольники или гоноэдры; заручившись же этим понятием, мы легко выведем правильные гоноэдры высшей степени, гоноэдры равносторонние и равноугольные высшей степени. Точно так же легко докажем одинаковость степени типического гоноэдра и соответствующего ему подтипического.

Однако, прилагая эту теорию к гоноэдрам, мы имеем возможность сделать здесь особенный вывод, не имеющий места для плоских многоугольников, а именно: мы знаем, что для каждого гоноэдра есть соответственный дополнительный; найдем зависимость этого рода для гоноэдров высшей степени. Мы знаем, что типическому гоноэдру соответствует дополнительный подтипический. Назовем двугранные углы какого-нибудь типического гоноэдра через α_1, α_2 и т. д., и если проведем через его вершину произвольную прямую, проходящую внутри его, и соединим эту прямую с его ребрами последовательно плоскостями по порядку, то таким образом мы его разобьем на m тригоноэдров, если m — его наименование. Величина одного из этих тригоноэдров будет равна $\frac{\Sigma B_1}{2} - d$, где ΣB_1 означает сумму его двугранных углов; если же возьмем сумму всех этих тригоноэдров, то величина ΣB разобьется на 2 части: 1) на сумму двугранных углов собственно гоноэдра, т. е. $\Sigma\alpha$, и 2) на сумму двугранных углов около проведенной прямой; ясно, что если степень

взятого гоноэдра будет ε, то эта сумма будет равна $\varepsilon 4d$, а потому величина гоноэдра выразится через $G_\varepsilon = \frac{\Sigma\alpha + \varepsilon \cdot 4d}{2} - d \cdot m = d(2\varepsilon - m) + \frac{\Sigma\alpha}{2}$.

В дополнительном гоноэдре каждый плоский угол будет составлять дополнение до $2d$ двугранным углам первого, а, значит, сумма этих плоских углов будет $\Sigma P = \Sigma(2d - \alpha) = 2dm - \Sigma\alpha$. Отсюда $G_\varepsilon = 2d\varepsilon - \frac{\Sigma P}{2}$.

Это выражение отличается от выражения, выведенного в теореме 18 I отдела,[86] тем, что вместо $2d$ входит $2d\varepsilon$, и, значит, с повышением степени какого-нибудь гоноэдра повышается и сумма плоских углов ему дополнительного. Само собою разумеется, что степень обоих гоноэдров одинакова. В случае равенства двугранных углов первого имеет место равенство плоских углов второго.

§ 95. Теперь перейдем к многогранникам высшей степени и начнем с вывода соотношения между элементами такого многогранника, так как многогранники эти, как составленные из нескольких периметров, по приведенным в предыдущей главе соображениям, уже не могут быть отнесены к эйлеровым.

Легко видеть, что элементами такого многогранника могут быть гоноэдры и грани высшей степени, так как и те, и другие составляются при составлении самого многогранника из койлоэдров.

Будем означать наименования граней m_1, m_2 и их степень соответственно через e_1, $e_2, \ldots$, причем в частных случаях как те, так и другие величины могут быть одинаковыми. Степень гоноэдров будем означать через ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$

Тогда, по соотношению, только что выведенному для какого-нибудь гоноэдра, вершина которого находится внутри многогранника, а ребра проходят через вершины одной из граней, получим

$$Ge = \frac{\Sigma\alpha}{2} - d(m - 2e).$$

Сумма же таких выражений будет не что иное, как сумма гоноэдров около одной точки для многогранника степени E, и, следовательно,

$$\sum G_e = 4dE = \sum\left\{\frac{\Sigma\alpha}{2} - d(m-2e)\right\} = \sum\frac{\Sigma\alpha}{2} - \sum dm + \sum 2de.$$

Из полученных трех членов первый выражает собою сумму двугранных углов около всех прямых, проведенных через взятую точку и вершины многогранника. Ясно, что сумма эта составляется из отдельных величин $4d\varepsilon_1$, $4d\varepsilon_2$ и т. д., выражающих сумму двугранных углов около одной из этих прямых.

Второй член выражает собою сумму произведений из d на наименование каждой грани; но так как при суммировании каждая сторона грани повторится два раза, то ясно, что величина m есть не что иное, как двойное число ребер многогранника.

Наконец, третий член выражает собою сумму произведений из $2d$ на степень грани, причем по выше сделанному обозначению каждой грани наименования m_1 соответствует степень e_1.

Поэтому выведенное выражение мы можем написать так:

$$4dE = 2d\Sigma\varepsilon - 2dr + 2d\Sigma e \quad \text{или} \quad r + 2E = \Sigma\varepsilon + \Sigma e.$$[1]

В этой формуле член $\Sigma\varepsilon$ выражает сумму степеней гоноэдров, и, следовательно, если все гоноэдры первой степени, то член этот будет просто n, где n — число вершин; точно так же, если все грани первой степени, то член Σe превратится в f, т. е. число граней. В последнем частном случае мы получаем, следовательно, $r + 2E = f + n$; отсюда заключаем, что могут быть многогранники высшей степени, грани и гоноэдры которых первой степени. Если же еще и $E = 1$, то формула будет не что иное, как формула Эйлера.

[1] Из „Fortschritte de Mathematik“ я узнал, что формула эта уже была выведена Гессом в произведении: Cassel. Ueber die zugleich gleicheckigen und gleichflächigen Figuren. Самого произведения мне видеть, однако, не удалось.

Вообще же в различных частных случаях формула эта будет упрощаться.

1) Если все гоноэдры одинаковой степени, то формула принимает вид $r+2E=\varepsilon n+\Sigma e$. Это формула Бадуро. Она применима, очевидно, и к частному случаю заданного условия, а именно к случаю равенства всех гоноэдров, т. е. к изогонам высшей степени.

2) Если все грани одинакового наименования, то формула принимает вид $r+2E=\Sigma\varepsilon+fe$. В этом виде она еще не была выведена никаким автором; она может быть применима к изоэдрам высшей степени.

3) Если одновременно и гоноэдры, и грани одинакового наименования, то она принимает вид $r+2E=\varepsilon n+ef$. Эта формула Руже и Де Комберусс. Она, очевидно, применима и к правильным многогранникам высшей степени.

4) Если все гоноэдры первой степени и все грани какой-нибудь другой одинаковой степени, то формула принимает вид $r+2E=n+ef$. Это формула Пуансо. Она, как увидим ниже, применима к одной половине всех правильных многогранников.

5) Подобно предыдущей мы можем получить формулу $r+2E=\varepsilon n+f$, применимую, как увидим, для другой половины правильных многогранников.

Теперь применим эту формулу к какому-нибудь типическому многограннику степени E. Тогда для подтипического получим $r'+2E'=\Sigma\varepsilon'+\Sigma e'$. Но так как центральный гоноэдр типического тожествен с центральным дополнительным подтипического, то ясно, что не только число гоноэдров последнего и их наименование, но также и их степень одинаковы с числом граней типического, их наименованием и степенью. То же самое и обратно, т. е. число гоноэдров типического, их наименование и степень одинаковы с числом граней подтипического, их наименованием и степенью. Точно так же и число ребер обоих многогранников одинаково по той причине, что каждое из этих чисел, умноженное на 2, одновре-

менно выражает собою сумму наименований граней и сумму наименований гоноэдров. Сообразуясь со всем этим, мы видим, что 1) $r=r'$, 2) $\Sigma\varepsilon=\Sigma e'$ и 3) $\Sigma e=\Sigma\varepsilon'$. Отсюда заключаем, что и $E=E'$, т. е. степень типического и подтипического многогранников одинакова.

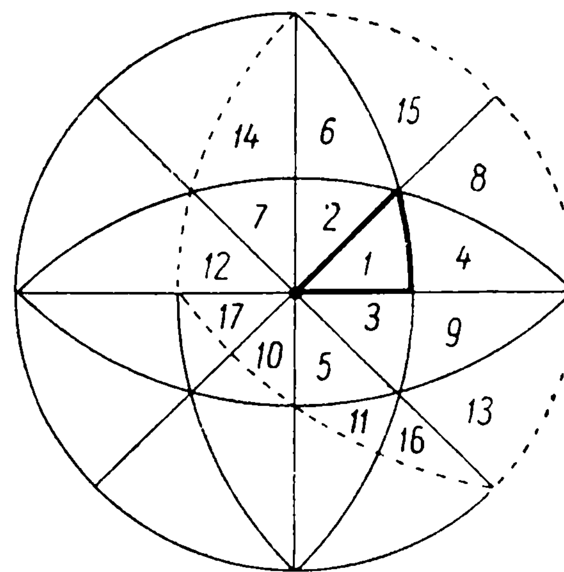
Само собою разумеется, что типическому изоэдру высшей, так же как и первой степени, соответствует подтипический изогон, а правильному типическому соответствует и правильный подтипический. Отсюда видна соотносительность формулы 1) с формулой 2), так же как формулы 4) с формулой 5).

§ 96. Теперь, прежде чем приступить к выводу изоэдров и изогонов высшей степени, мы остановимся на их связи с фигурами первой степени. Нетрудно видеть, например, что типический изоэдр какой угодно степени мы можем получить, располагая как угодно известное число одинаковых типических изоэдров первой степени, лишь бы совпадали их центры. Очевидно, что такие изоэдры будут составляться уже не из изокойлоэдров, а из каких-нибудь других койлоэдров с неравными гранями. Мы же займемся исключительно такими, которые могут быть составлены из типических изокойлоэдров, а для последних, как мы уже знаем, основные гоноэдры должны быть тожественны с основными гоноэдрами выпуклых изоэдров. Тожественность же системы основных гоноэдров ведет за собою и тожественность всех условий симметрии; поэтому самый вывод форм высшей степени мы можем вести по каждой системе и в системе — по ее отделениям отдельно. Но так как такой вывод завел бы нас слишком далеко, а нам достаточно ограничиться лишь указанием того метода, по которому может быть сделан этот вывод, то мы и изберем для примера те изоэдры высшей степени, которые имеют выпуклые основные гоноэдры, и, значит, грани первой степени и принадлежат гомоэдрическому отделению кубо-октаэдрической системы.

Этот же вопрос сводится к вопросу о составлении всех возможных гоноэдров первой степени из элементарных гоно-

эдров этого отделения, так как очевидно, какую бы непрерывную совокупность элементарных гоноэдров этого отделения мы ни приняли за элементарный гоноэдр изоэдра высшей степени, мы всегда получим возможное решение, если только возможно провести грань, ограниченную гранями взятого элементарного гоноэдра.

Так как из E граней изоэдров первой степени составится грань изоэдра степени E, то ясно, что составными койлоэдрами этого изоэдра будут те, соответственные грани которых имеют общую точку касания, находящуюся внутри грани того выпуклого изоэдра, который представляет ядро всей системы койлоэдров.

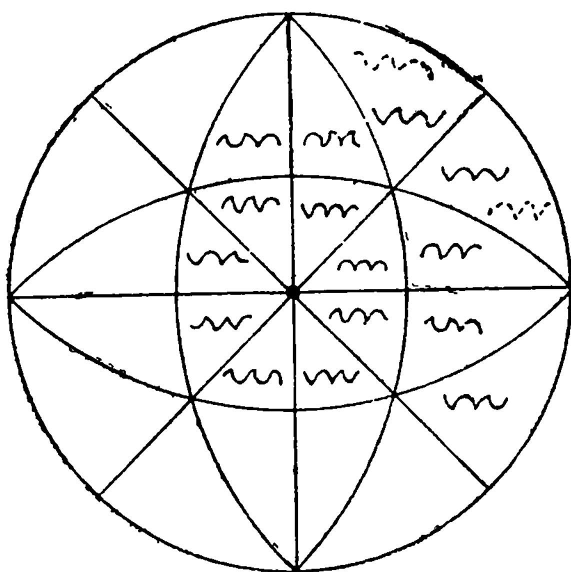


Фиг. 132.

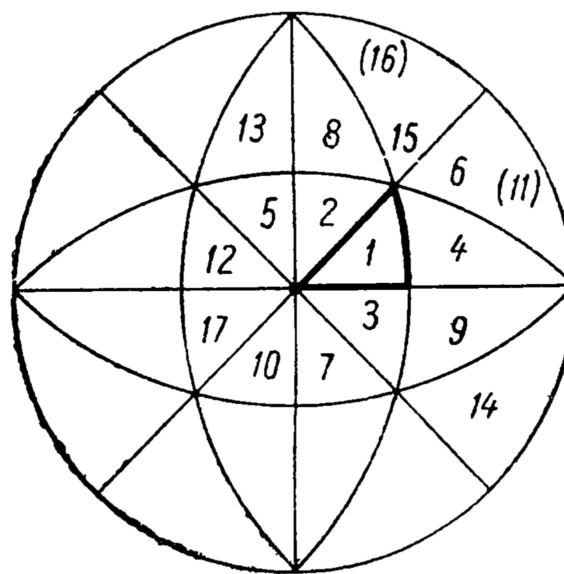
Нетрудно видеть, что если мы возьмем за основание нумерацию, сделанную для койлоэдров (фиг. 132), то при применении ее к рассматриваемому случаю получим в изображении некоторое различие. Например, если мы построим койлоэдр для точки, находящейся внутри гоноэдра № *8*, то грань, касательная к этой точке, будет ограничена гранями основного гоноэдра (т. е. № *1*). Если же № *8* входит в систему гоноэдров, составляющих основной гоноэдр некоторого изоэдра высшей степени, то соответственно гоноэдру № *8* мы должны будем взять не только что упомянутый койлоэдр, а некоторый другой, а именно такой, который будет соответствовать № *1*, если за основной примем № *8*, так как только такой койлоэдр будет иметь грани, составляющие продолжение граней внутреннего выпуклого изоэдра, представляющего ядро системы. Такой же койлоэдр есть не что иное, как тот, который соответствует № *6*. Поэтому для разбираемой цели вместо № *8* нужно поставить № *6*. Поступая таким же образом для всех других гоноэдров, мы получим новое изображение нумерации, представленное на фиг. 133

в виде обозначения и на фиг. 134 прямо в виде нумеров, причем пунктиром [87] или в скобках показаны те номера и знаки, которые находятся на нижней стороне сферы.

В этой же нумерации представлены койлоэдры на приложенной таблице.[88] Теперь, складывая гоноэдр *№ 1* со смежными и приняв за основание нумерацию фиг. 134 для того, чтобы по этим номерам брать соответственные койлоэдры, мы разрешим поставленный вопрос.



Фиг. 133.



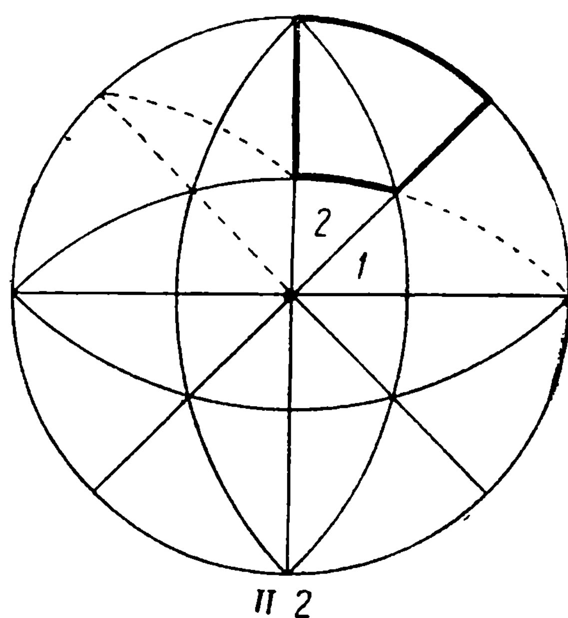
Фиг. 134.

Получив какой-нибудь сложный гоноэдр, мы по числу входящих в его состав элементарных найдем степень того изоэдра, для которого он сам является элементарным. Затем, построив ему дополнительный, мы найдем, для каких именно точек возможны изоэдры с таким элементарным гоноэдром. На всех изображенных фигурах стороны этого дополнительного гоноэдра означены пунктиром. Каждый такой чертеж вполне определяет нам систему всех изоэдров, имеющих в качестве элементарного тот гоноэдр, грани которого означены толстыми линиями, и непосредственно может служить для вывода самых разнообразных свойств этих изоэдров, например, для решения вопросов: формы каких изоэдров первой степени возможны в данной системе (правильных многогранников, ромбического додекаэдра, пирамидального куба и проч.)? Какие грани у этих изоэдров? Какого наиме-

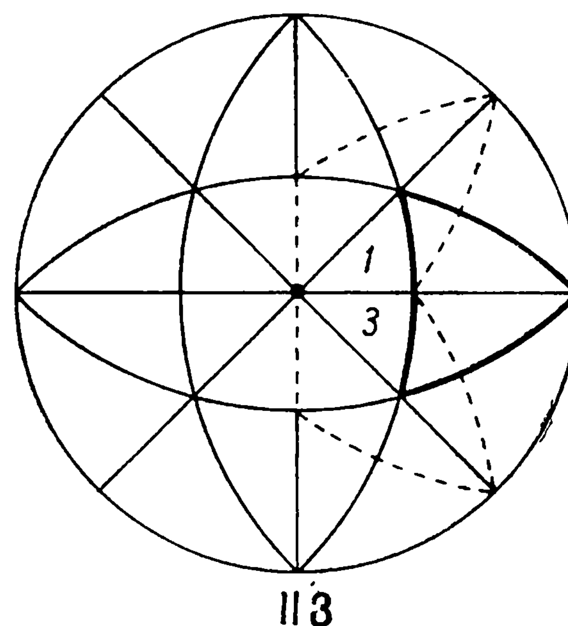
нования и какой степени гоноэдры? Какие решения предельны? И т. д., и т. д.

Найдя же изоэдр и изучив его свойства, мы по его соотносительности с подтипическим изогоном решим все аналогические вопросы и по отношении к этому последнему.

Для систематического же нахождения всех сложных элементарных гоноэдров первой степени мы можем пользоваться многими способами. Одним из таких простых способов будет построение двусторонников с углами, равными углам основного гоноэдра, и построение сложных гоноэдров посредством



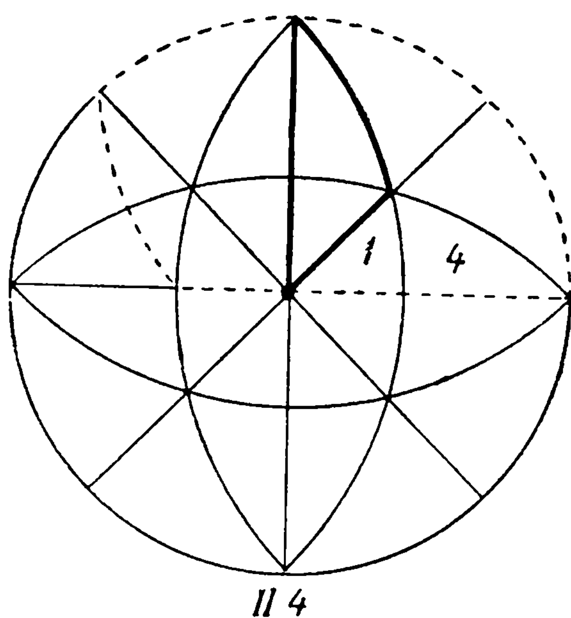
Фиг. 135.



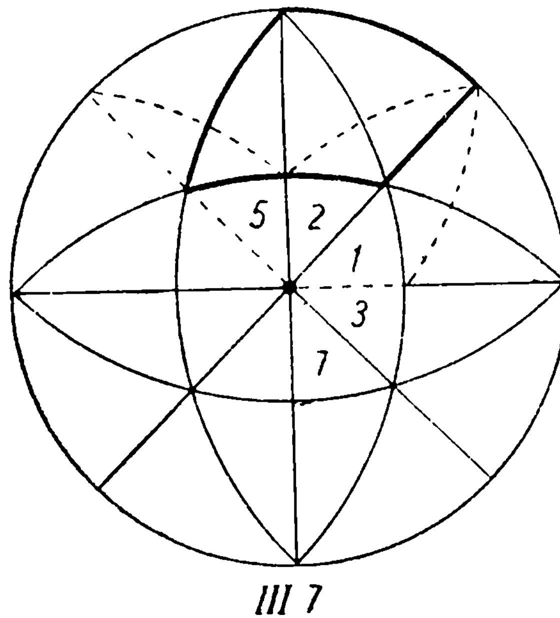
Фиг. 136.

прибавления к крайнему из них, находящемуся при вершине двусторонника, по одному или нескольким другим элементарным гоноэдрам, собюдая то условие, чтобы полученные сложные гоноэдры были выпуклые. Найдя все такие гоноэдры в пределах двусторонника, например в 45°, и переходя затем к двусторроннику в 60°, мы уже должны будем пропускать все те решения, в которых один из двугранных углов будет 45°, так как такой гоноэдр непременно будет тожествен с одним из гоноэдров, раньше построенных. Поступая таким образом, мы получим решения, например, в таком порядке (как обозначено на фиг. 135—158): *II 4*, *III 8*, *IV 11*, *V 12*, *II 3*, *III 7*, *IV 10*, *VI 13*, *VII 14*, *II 2*, *IV 9*, *V 15*, *VI 9*, *VI 15*, *VIII 16*, *IX 15*, *X 17*, *IV 12*, *VIII 17*, *X 16*,

XI 16, *XII 16*, *XIV 17* и *VI 14*. Здесь римскими цифрами обозначены степени соответствующих изоэдров, а обыкновенными — наивысшие нумера входящих в состав элементарных



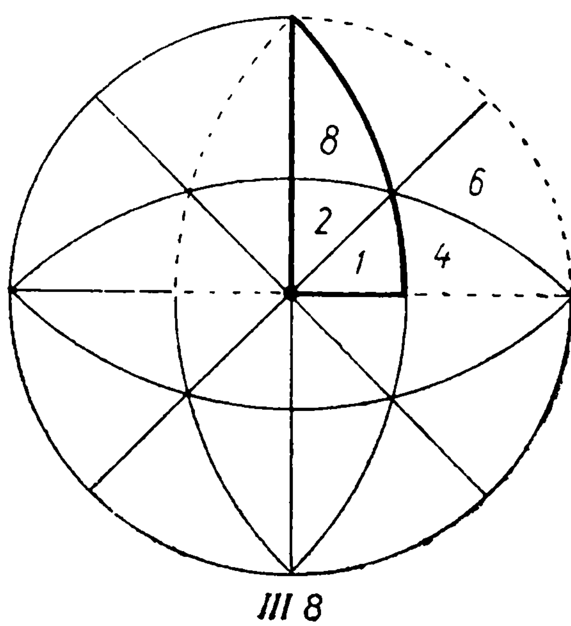
Фиг. 137.



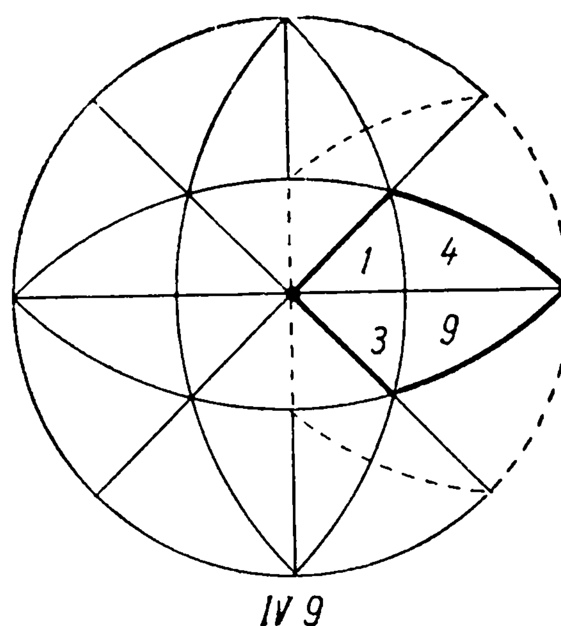
Фиг. 138.

гоноэдров, что соответствует наивысшим нумерам изокойлоэдров, входящих в состав искомого гоноэдра высшей степени.

Так как одну и ту же грань изоэдра высшей степени мы можем получить, складывая грани различных койлоэдров, то



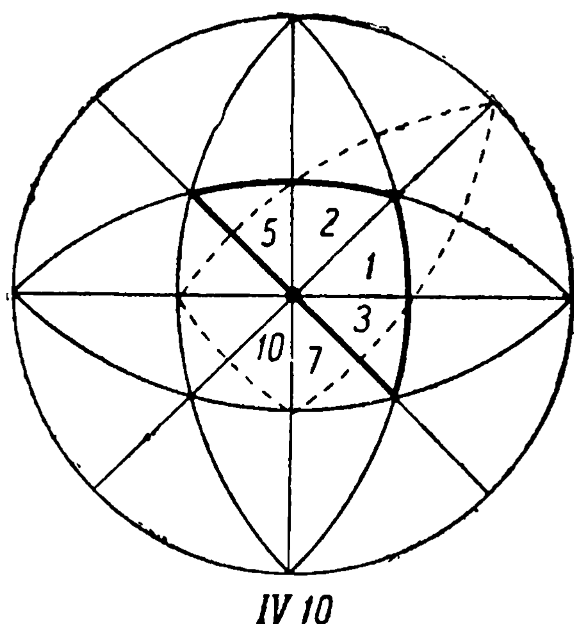
Фиг. 139.



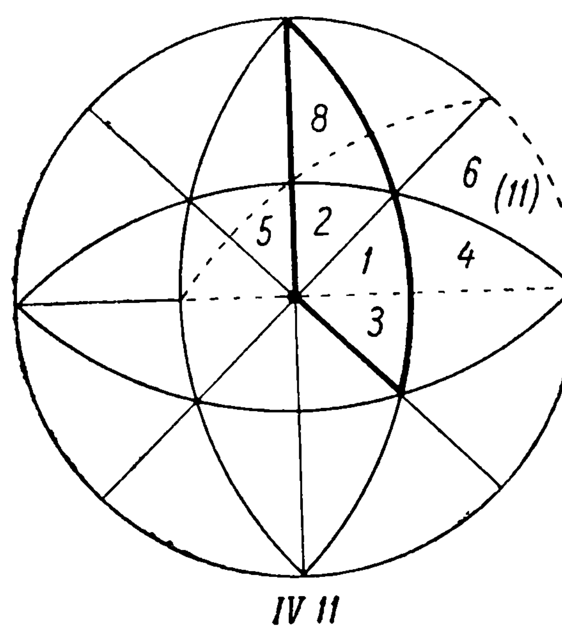
Фиг. 140.

для общности решения на самих чертежах поставлены цифры внутри тех гоноэдров, которые могут быть взяты для составления сложного гоноэдра, причем гоноэдр № *1* входит во все без исключения, так как точки внутри этого гоноэдра соот-

ветствуют именно самому внутреннему типическому изоэдру, составляющему ядро всех систем. Например, для гоноэдров, состоящих из двух элементарных, очевидно, для сложения

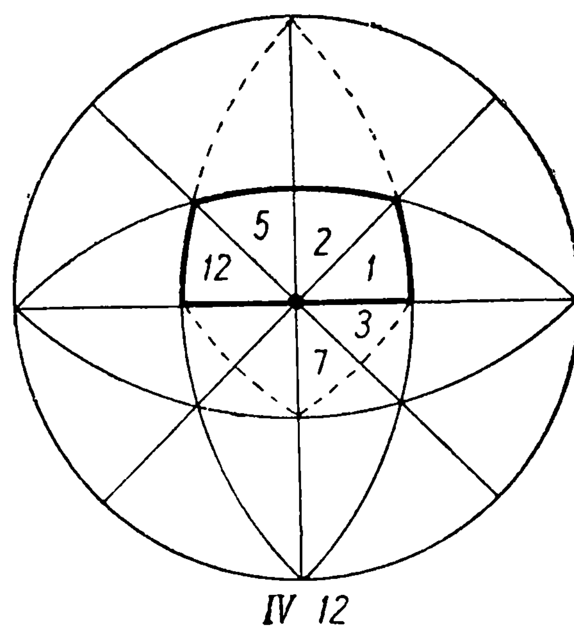


Фиг. 141.

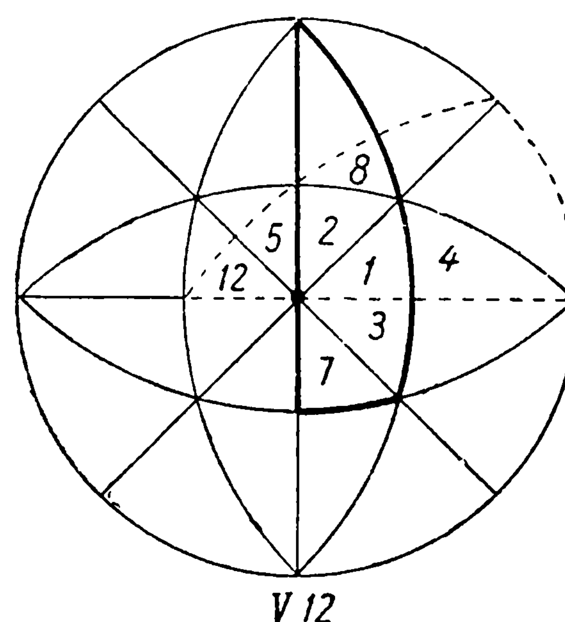


Фиг. 142.

могут быть взяты лишь два определенных элементарных гоноэдра; не то для основных гоноэдров изоэдров третьей и высшей степеней. Например, для изоэдров системы, озна-



Фиг. 143.

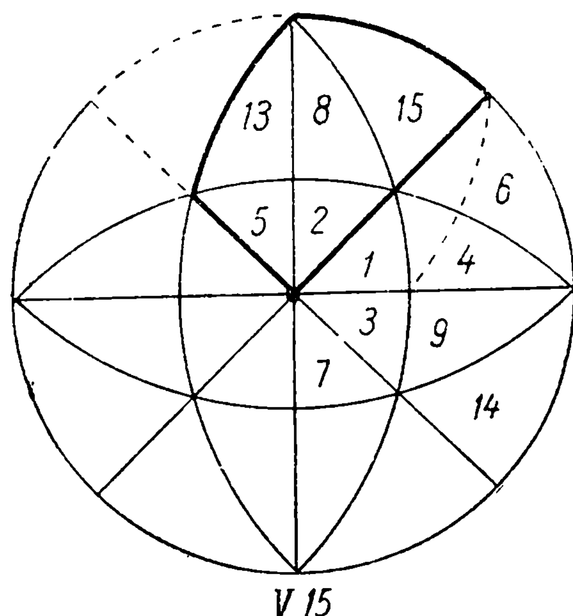


Фиг. 144.

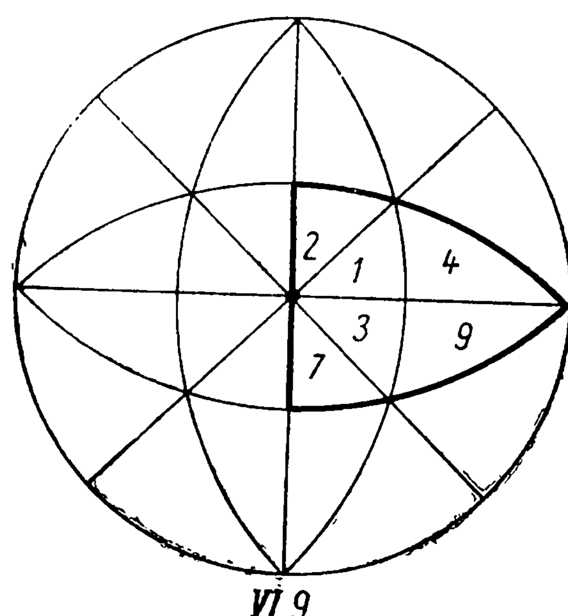
ченной *III 7* (фиг. 138), за основные гоноэдры могут быть взяты совокупности *1*, *3* и *7*; *2*, *1* и *3*, а также *1*, *2* и *5*; но так как номера эти означают некоторые койлоэдры как элементы изоэдров этой системы, то, следовательно, и самые

изоэдры могут быть сложены из различных койлоэдров, как только что указано, по их нумерам.

§ 97. В виде иллюстрации значения этих чертежей, мы, пользуясь ими, решим в самом общем виде вопрос, которым

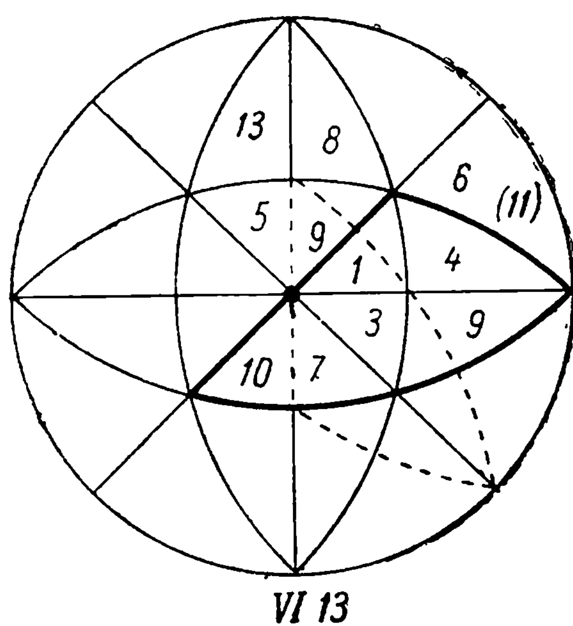


Фиг. 145.

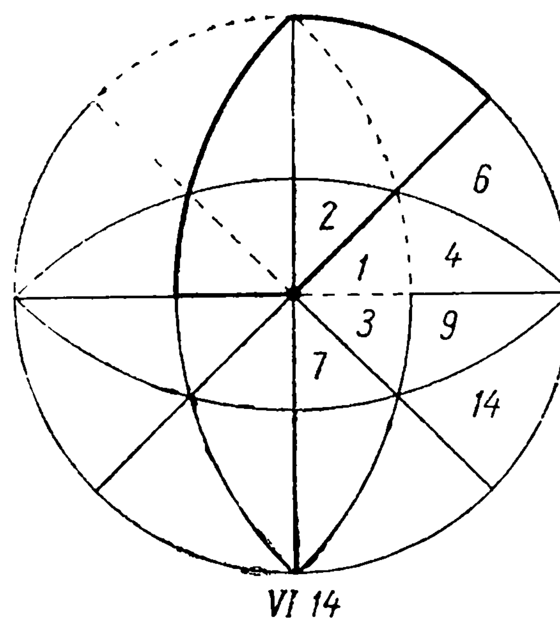


Фиг. 146.

в недавнее время задался Бадуро, а именно, определить все возможные особые изогоны высшего порядка.[1] Как мы знаем, всем особым изогонам, как фигурам подтипическим, соответ-



Фиг. 147.

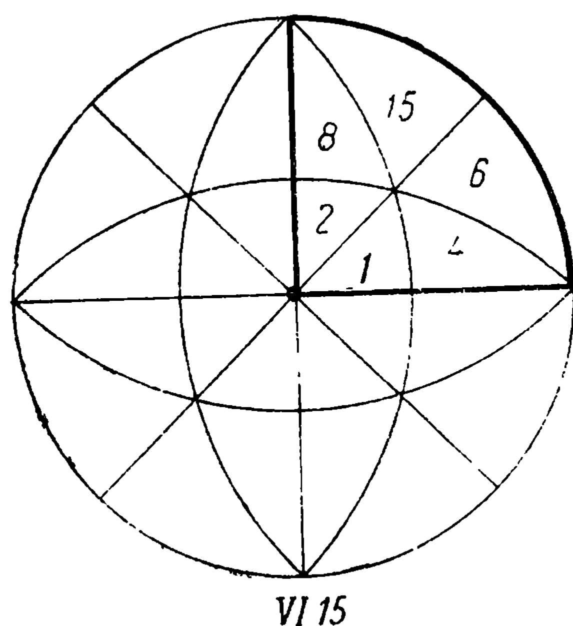


Фиг. 148.

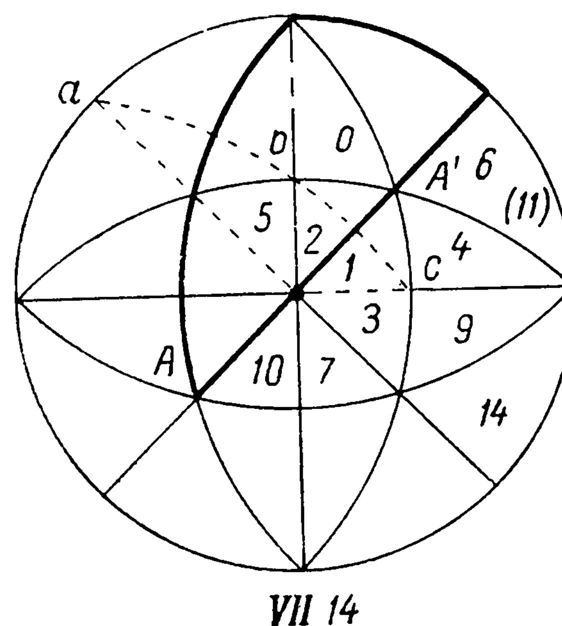
ствуют особые изоэдры, как фигуры типические, а для последних мы найдем все решения, если определим все точки,

[1]) Сам Бадуро называет такие фигуры „figures isoscèles“, т. е. равносторонние, так как все ребра таких фигур равны между собою.

находящиеся на дугах, делящих пополам все углы, принимая за равно делящие также и стороны основного гоноэдра. Таким образом, с чрезвычайной простотой, мы находим все

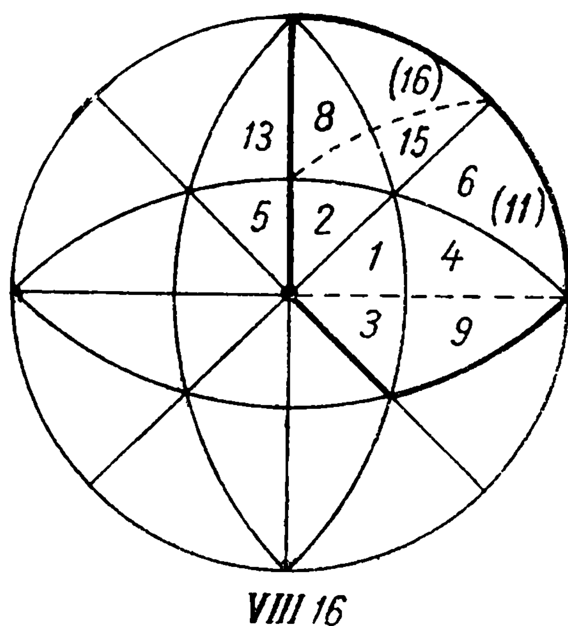


Фиг. 149.

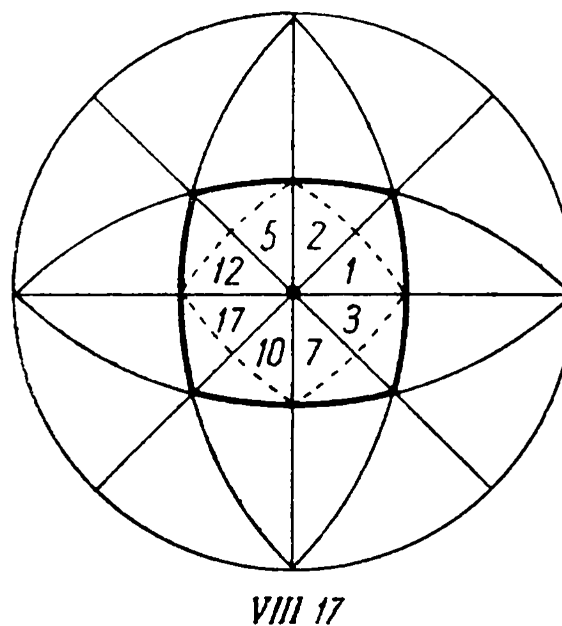


Фиг. 150.

возможные решения, которые, однако, не мог получить в полноте упомянутый автор, так как руководствовался ненадежным способом построения из фигур выпуклых.



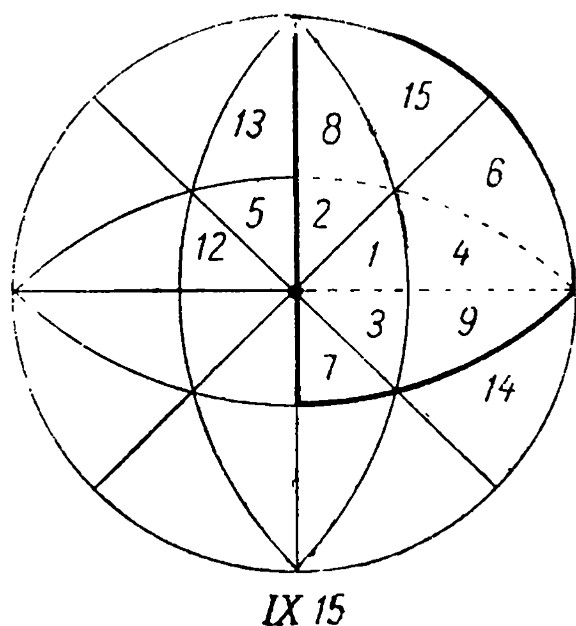
Фиг. 151.



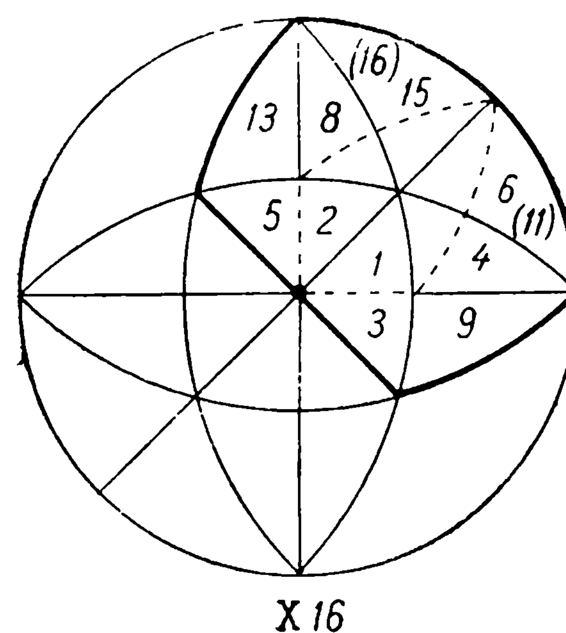
Фиг. 152.

Ради наглядности этих выводов, мы их сопоставляем в следующей таблице, в которой знаки + выражают возможные решения в пределах дополнительного гоноэдра; знаками **O** означены решения, соответствующие точкам, находящимся

на сторонах дополнительного гоноэдра, и наконец, знаками — возможные решения, соответствующие точкам, находящимся вне пределов дополнительного гоноэдра; если перед знаком стоит коэффициент 2, то это означает возможность двух симметрических решений.[1]) Кроме того, решения, соответствующие точкам внутри основного гоноэдра, означаются тем, что их знак помещается внутри круга; те решения, которые соответствуют сторонам основного гоноэдра, означаются поставленною сбоку дугою; те же означения, в ко-



Фиг. 153.



Фиг. 154.

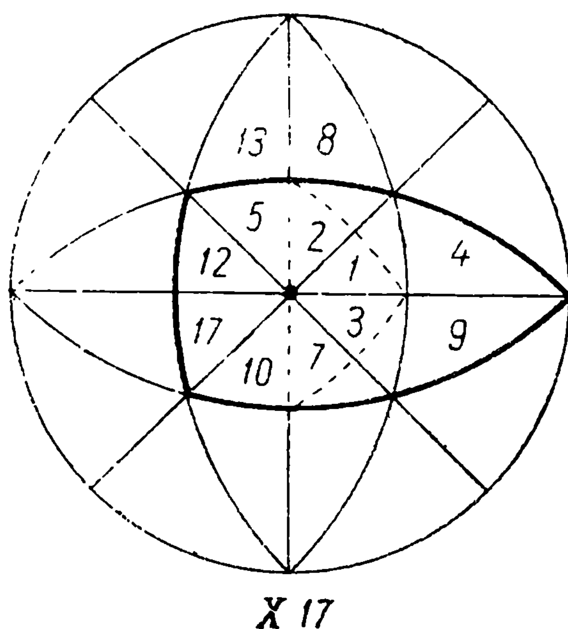
торых нет этих знаков, относятся к вершинам основных гоноэдров.

Но, изобразив таким образом все решения, мы, очевидно, получим много повторений, так как некоторые внутренние решения (а именно находящиеся на сторонах элементарных гоноэдров, делящих эти гоноэдры на две симметричные половины) будут тожественны с другими решениями, соответствующими точкам, находящимся на сторонах других основных гоноэдров. Поэтому мы пропускаем все те внутренние решения, [при] которых точки находятся на сторонах элементарных гоноэдров, делящих их пополам.

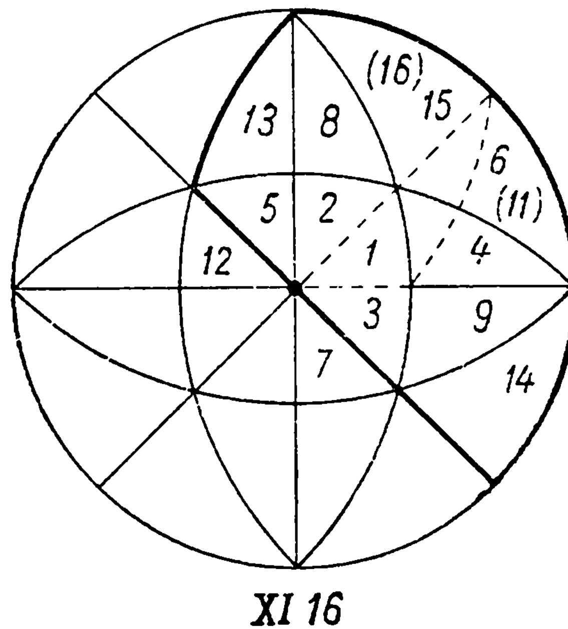
---

1) Решения эти, впрочем, всегда совпадают, так как сами фигуры обладают плоскостями симметрии.

Предельные решения, так же как и для изоэдров первой степени (койлоэдров), означают систему лучей или граней, безграничных и параллельных осям или плоскостям симметрии.

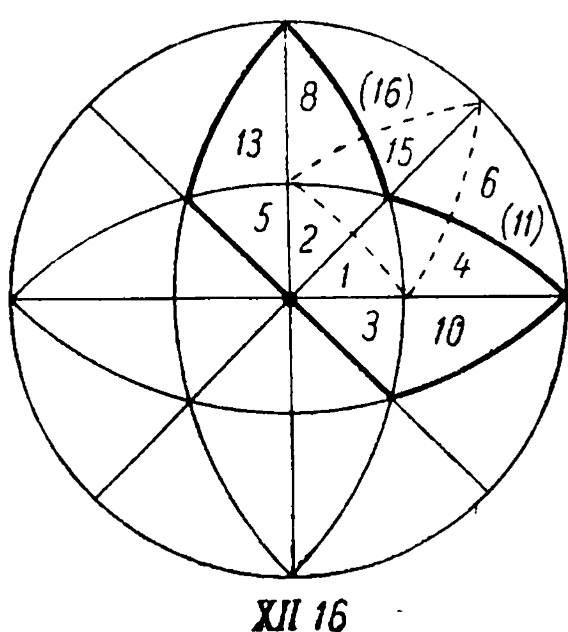


Фиг. 155.

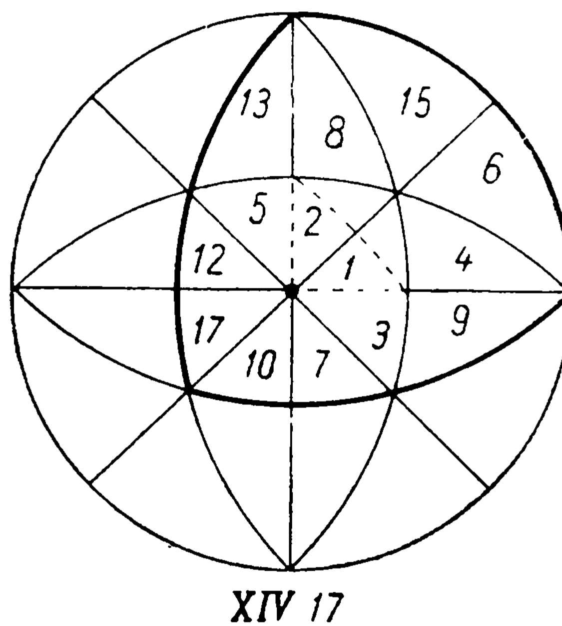


Фиг. 156.

Теперь остановимся на смысле отрицательных решений. В собственном смысле эти решения означают невозможность, так как очевидно, что в случаях этих решений не может существовать грань, ограниченная гранями основного гоно-



Фиг. 157.



Фиг. 158.

эдра. Но зато в этих случаях такая грань будет пересекаться с продолжением граней основного гоноэдра. Возьмем для примера решение, соответствующее *KOR* в *VII 14* (фиг. 150). В этом случае отрицательное решение, соответствующее

точке O, находится за пределами дополнительного гоноэдра, а именно — вне его стороны abc. Поэтому, если вместо данного основного гоноэдра мы возьмем другой, который отличается от него тем, что его ребро A заменено диаметрально ему противоположным A', то решение O станет положительным и, следовательно, возможным; для того же, чтобы перейти от этого гоноэдра к данному, нужно только продолжать соответствующую грань изоэдра за пределы первого гоноэдра. Ясно, что грань эта не только никогда не пересечет ребра A, но будет бесконечно удаляться от него.

Для того, чтобы построить соответствующий изогон, нужно из точки O провести плоскости, перпендикулярные к ребрам основного гоноэдра. Легко видеть, что в случае отрицательного решения по отношению к какому-нибудь ребру, как, например, в рассматриваемом случае ребру A, грань изогона, перпендикулярная к этому ребру, пересечет его не в пределах самого гоноэдра, а за этими пределами, что можно назвать отрицательным пересечением. Поэтому отрицательные изогоны вполне возможны и отличаются от положительных только тем, что для них имеет место отрицательное пересечение.

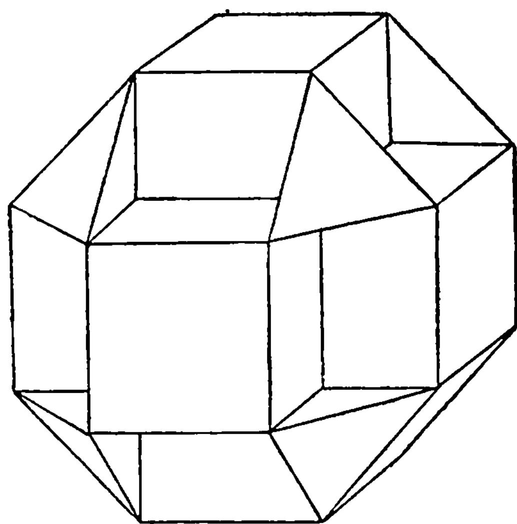
Точно так же легко понять, что в случае предельных решений грани изоэдра также будут бесконечны, но параллельны каким-нибудь ребрам основного гоноэдра, а грани изогона будут пересекать некоторые из этих ребер в вершине гоноэдра, т. е. в центре самого многогранника, или иначе, они будут диаметральны.

Запасшись этими соображениями, мы легко поймем как способ составления ниже прилагаемой таблицы, так и смысл полученных решений. В особой графе мы отмечаем решения, полученные Бадуро, и приводим вычисленные им величины степеней соответствующих особых изогонов. Это сопоставление служит для указания несовершенства метода, принятого Бадуро для решения этого вопроса.

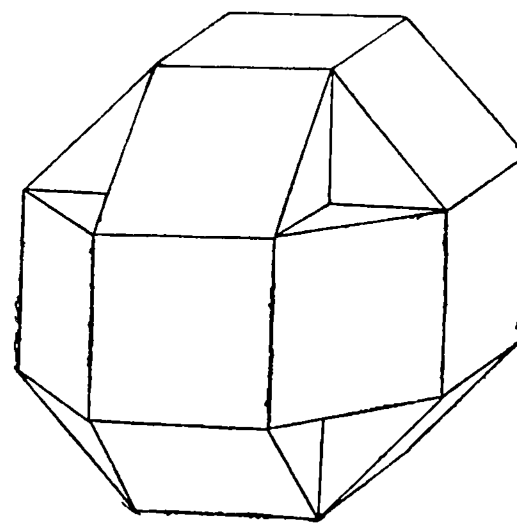
№	*K*	*O*	*R*	*KO*	*RO*	*KR*	*KOR*	Фигуры, найденные Бадуро
II 2								
3		2+-		2(+				
4	2*O*			2(+				По *KO* фиг. 104 (E=10)(фиг. 159).
III 7			*O*					
8	*OO*		*O*	⊕		(+(*O*		По *KO* фиг. 105 (E=9)[1] (фиг. 160).
IV 9								
10		2—	2(*O*					По *R* фиг. 97 (E=6) (фиг. 161).
11	—*O*	—	(*O*	(—	(+		⊕	По *RO* фиг. 91 (фиг. 162). По *R* фиг. 96 (E=5) (фиг. 163). По *KOR* фиг. 157 (фиг. 164).
12								
V 12	—(*O*	—	—	⊖	(+(—			По *RO* фиг. 93 (E=15)(фиг. 165).
15	*O*							
VI 9			2*O*	2(*O*				
13	—(*O*	(+=	(*O*)	(—				
14								
15								
VII 14	—	—	—	(+	(—	(—	⊖	По *KO* фиг. 106 (фиг. 166). По *KOR* фиг. 136 (фиг. 167).
VIII 16								
17		2(—2—						
IX 15	*O*—	(—	—		⊕	(*O*(—		По *RO* фиг. 92 (E=13)(фиг. 168).
X 16	2—							
17								
XI 16	—(—	—	—	(—(—	⊖			
XII 16								
XIV 17	2—				2(—			

[1]) Фиг. 160 отличается от фиг. 105, по Бадуро, в том отношении, что прибавлены квадратные грани, перпендикулярные к главным осям. В том же виде, как она изображена автором, она является особенным решением гоноэдров с вогнутыми углами, что выходит за пределы поставленной здесь задачи.

§ 98. В числе пропусков у Бадуро есть такие, как, например, замечательная фигура, изображенная на фиг. 169 и как бы составленная из трех кубов (решение *III 8* (фиг. 139); + по *KR*). Причиною пропуска могла послужить возможность

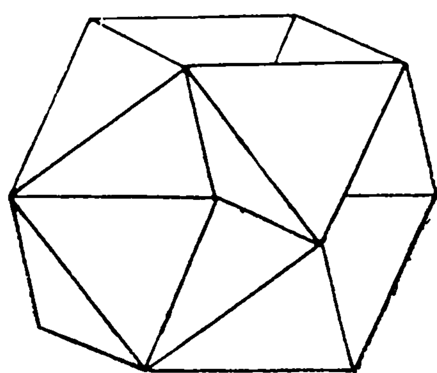


Фиг. 159 (фиг. 104 по Бадуро).



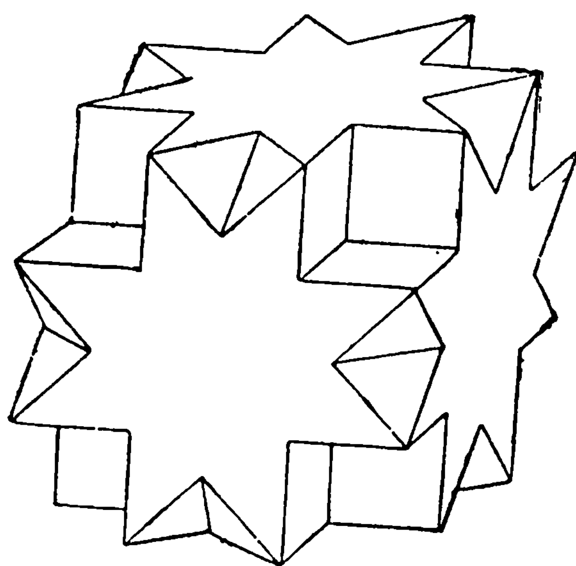
Фиг. 160 (фиг. 105 по Бадуро).

составления ее из других фигур первой степени. Но это соображение совершенно произвольно. Этой фигуре соответствует типический изоэдр (также, очевидно, разлагающийся на три откаэдра), который, как и все другие изоэдры высшей степени, может быть составлен из изокойлоэдров, а именно, например, изокойлоэдров *1*, *2* и *8 KR*; значит, стоит только переменить точку зрения, и фигура в этом смысле ничем не будет отличаться от всех других фигур: возможность же составляться из фигур первой степени будет лишь особое свойство всех фигур системы *III 8* в числе некоторых других, и причину этого свойства легко видеть в свойствах и величине основного гоноэдра этой системы, представляющего собою геометрического делителя 4d. Если бы на основании этого представления мы стали выпускать некоторые многогранники и многоугольники, то в правильных рядах гомологических фигур, например, в ряде правильных многоуголь-

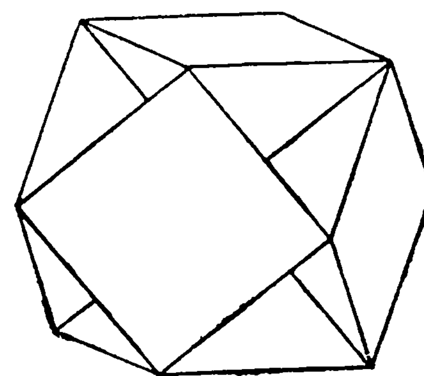


Фиг. 161 (фиг. 97 по Бадуро).

ников одной и той же степени или в ряде форм различных степеней одного и того же правильного многоугольника, мы получили бы ничем не объяснимые пробелы, что нарушало бы гармонию и цельность всех выводов этой области.

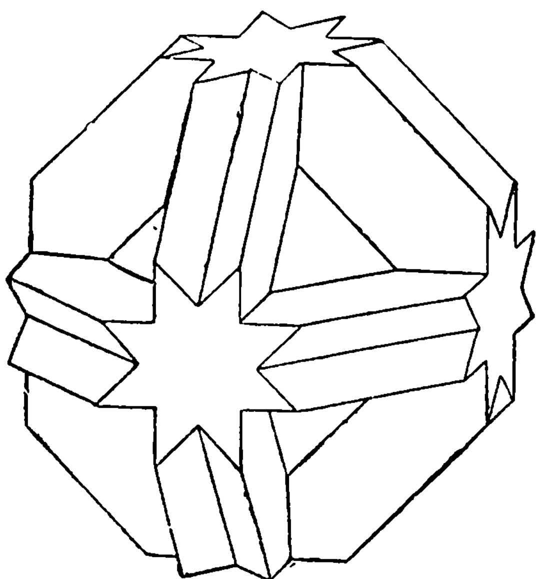


Фиг. 162 (фиг. 91 по Бадуро).

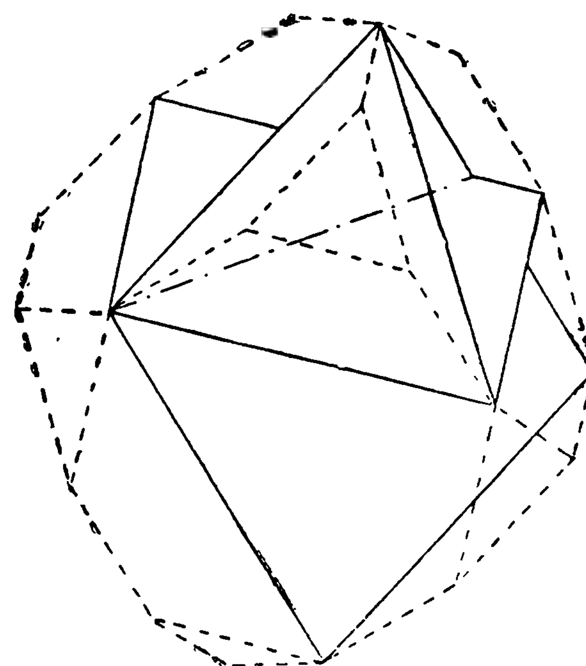


Фиг. 163 (фиг. 96 по Бадуро).

Чтобы нагляднее указать на несостоятельность только что указанного взгляда, приведем для примера изоэдры, соответствующие линии *КО* (делящей основной гоноэдр пополам)



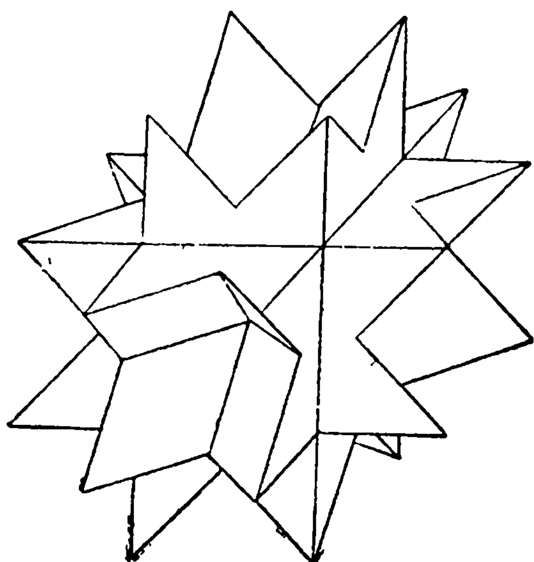
Фиг. 164 (фиг. 137 по Бадуро).



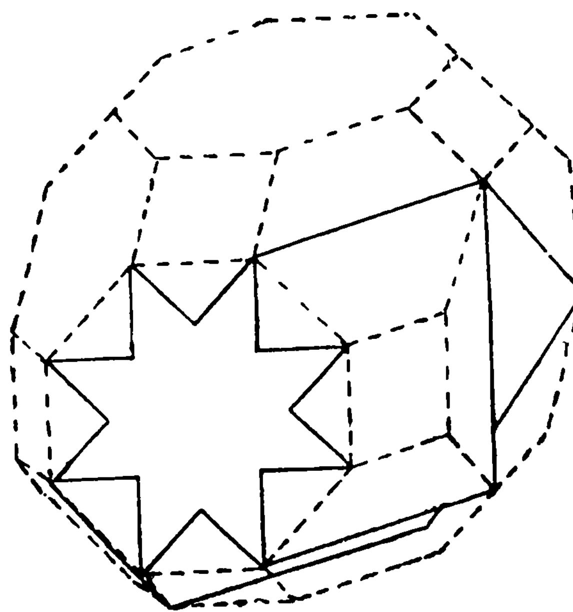
Фиг. 165 (фиг. 93 по Бадуро).

в решении, означенном *IV 10* (фиг. 141). Изоэдры эти представляют совокупность двух пирамидальных тетраэдров, между тем как решения, соответствующие точкам, находящимся бесконечно близко к этой линии, дадут связную фигуру

четвертой степени. По указанному взгляду пришлось бы, признавая бесконечный ряд фигур, отвергнуть предельные решения этого ряда, а это нелепо.

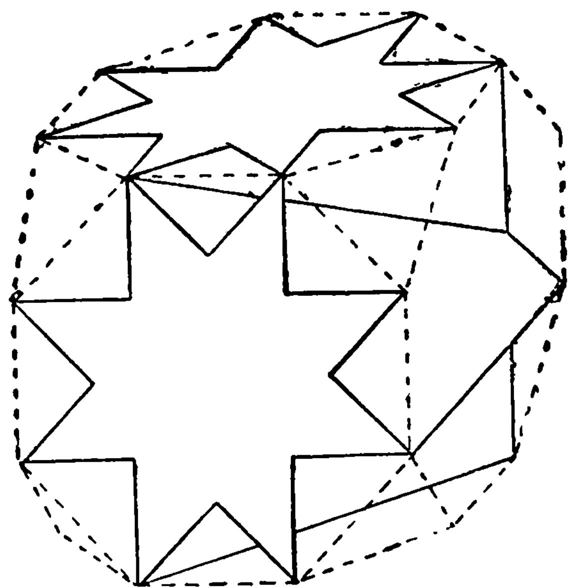


Фиг. 166 (фиг. 106 по Бадуро).

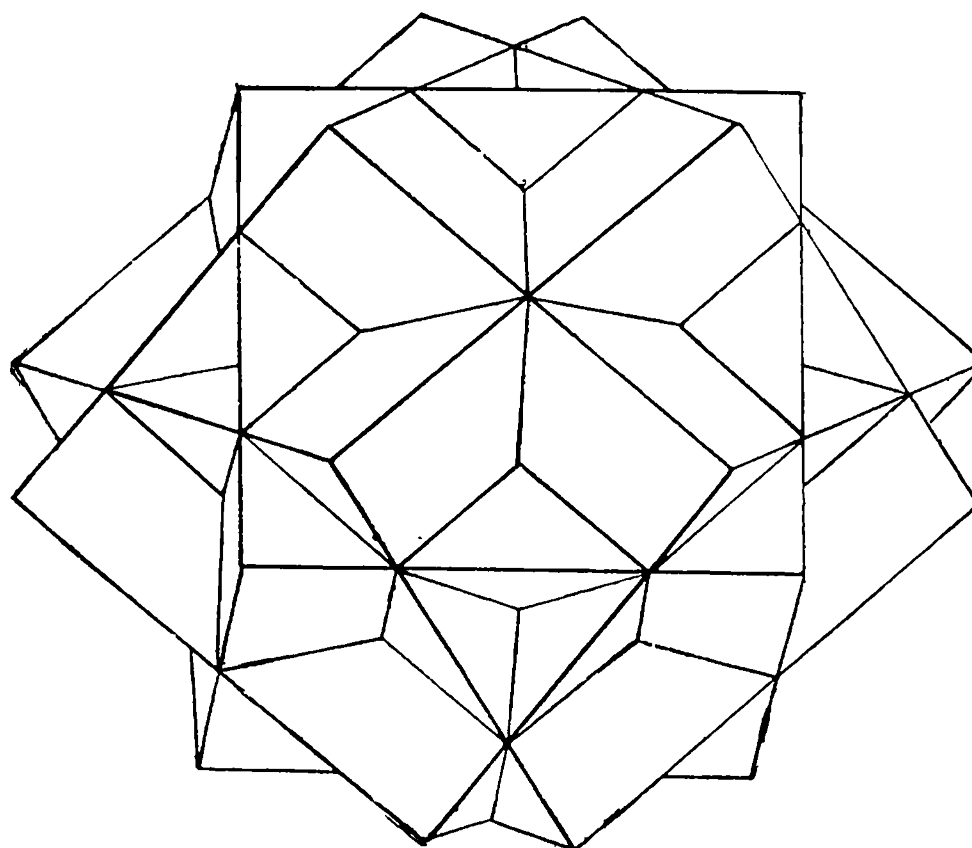


Фиг. 167 (фиг. 136 по Бадуро).

Сами изогоны высшей степени, например, упомянутый тройной куб, могут быть, по аналогии с тем, что нами ска-



Фиг. 168 (фиг. 92 по Бадуро).



Фиг. 169.

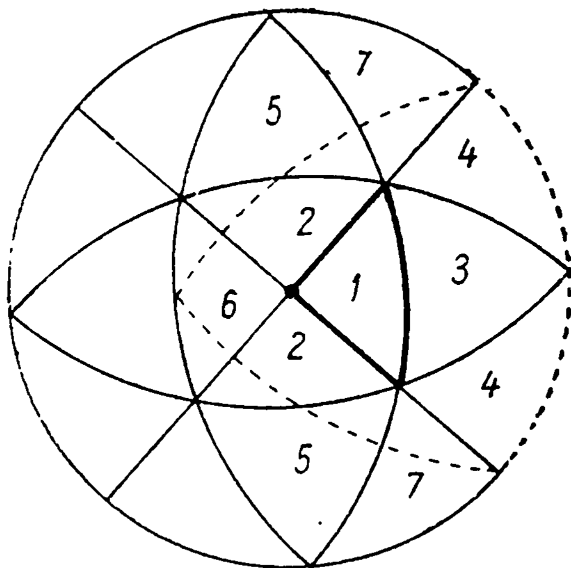
зано о плоских фигурах, получены из некоторого притупленного октаэдра, очертания которого рельефно обозначаются вершинами изображенной (фиг. 169) фигуры, посред-

ством троекратного вычитания из шара частей, находящихся между его поверхностью и поверхностями трех различных койлоэдров, подтипических по отношению к койлоэдрам *1* (собственно выпуклому многограннику) *2* и *8*, и следы этих вычетов ясно видны в трояких углублениях на поверхности рассматриваемого изогона.

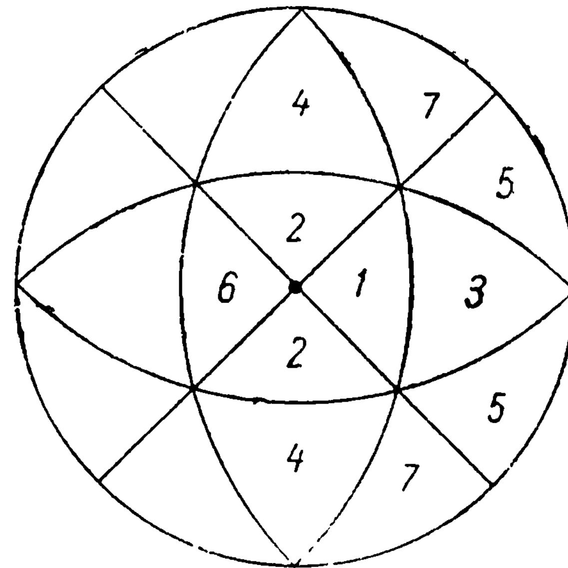
Наконец, бросается в глаза различие в степенях, приписанных одному и тому же многограннику в нашей таблице и у Бадуро. Это происходит не вследствие различия в определении степени многогранника, но вследствие неправильного представления себе этим автором основного гоноэдра изображаемых фигур. Правильность же принятия основного гоноэдра всегда возможна, так как, не зная происхождения фигуры, мы не можем отличить по внешнему виду два слившихся в вершине и общей грани гоноэдра от одного гоноэдра. Этим объясняется и совершенно невозможный вывод степени в $\frac{7}{2}$, о котором упомянуто ниже. Этот вывод свидетельствовал бы, что, так как основной гоноэдр не укладывается целое число раз в семерной сфере, то соответствующие ему изоэдры и изогоны имеют какие-то пробелы в связи с теми местами сферы, которые остаются пустыми.

§ 99. На основании соображений, подобных тем, которые приведены для рассмотренного гомоэдрического отделения, мы без труда построим все системы изоэдров и изогонов высшего порядка для всяких других систем симметрии и их отделений. На фиг. 170 и 171 означена нумерация койлоэдров и расположение основных гоноэдров для построения фигур высшей степени, принадлежащих тетраэдрическому отделению, а на фиг. 172—177 (*II 2, II 3, III 4,*[1]) *IV 6* и *VI 7*) показаны все возможные выпуклые основные гоноэдры фигур этой системы, а также гоноэдры, дополнительные первым.

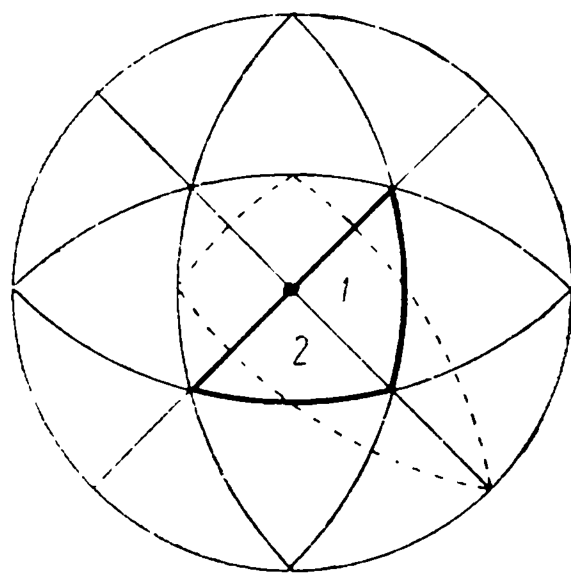
[1]) Фиг. 178 (70 по Бадуро) представляет пример по *K*, (О. по Бадуро $E = \frac{7}{2}$.



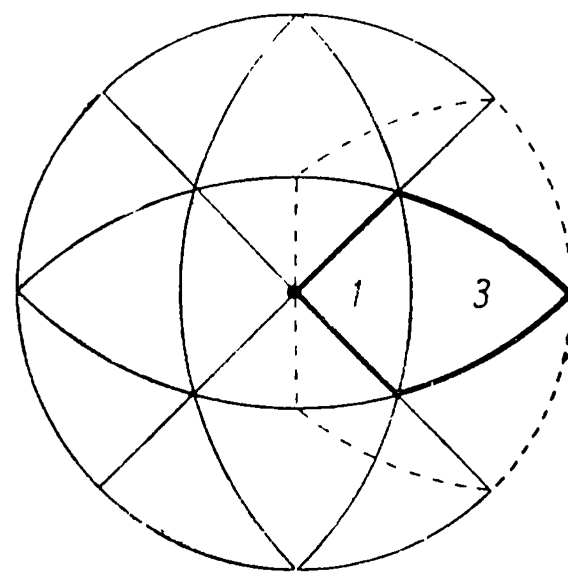
Фиг. 170.



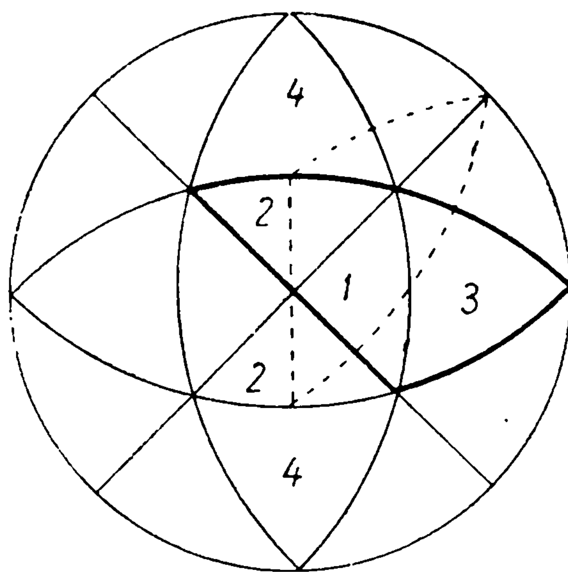
Фиг. 171.



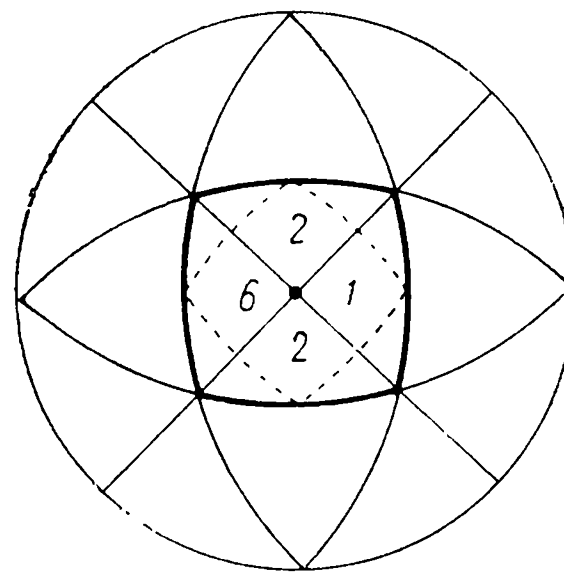
Фиг. 172.



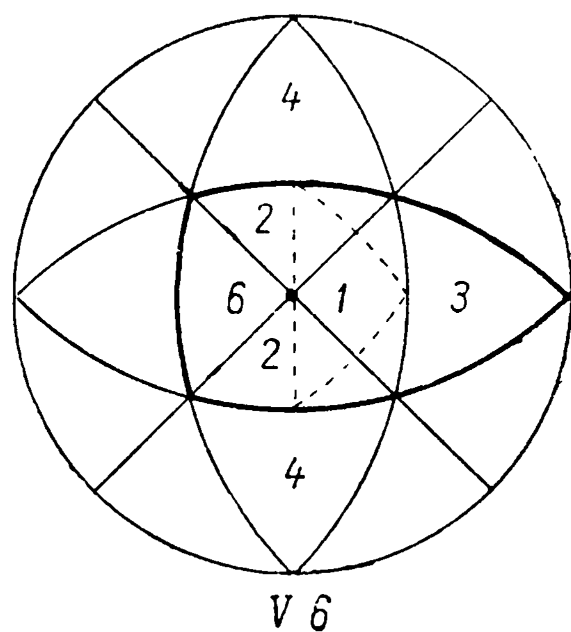
Фиг. 173.



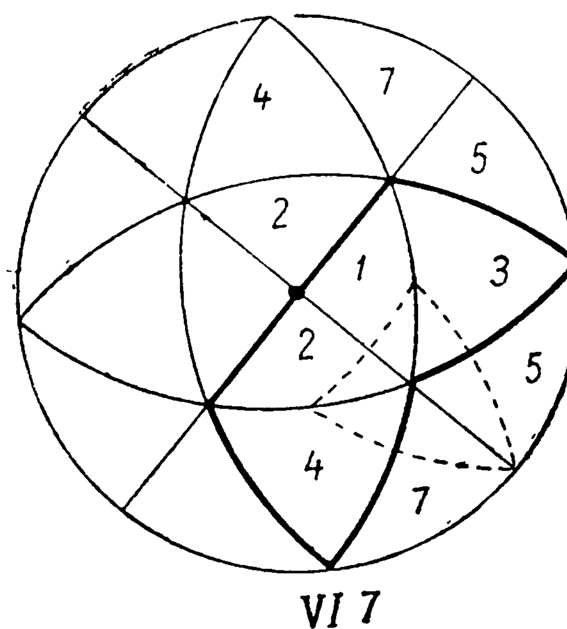
Фиг. 174.



Фиг. 175.



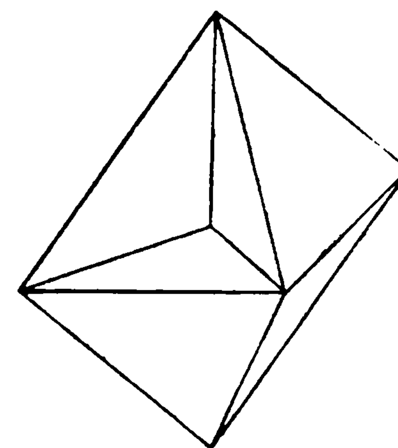
Фиг. 176.



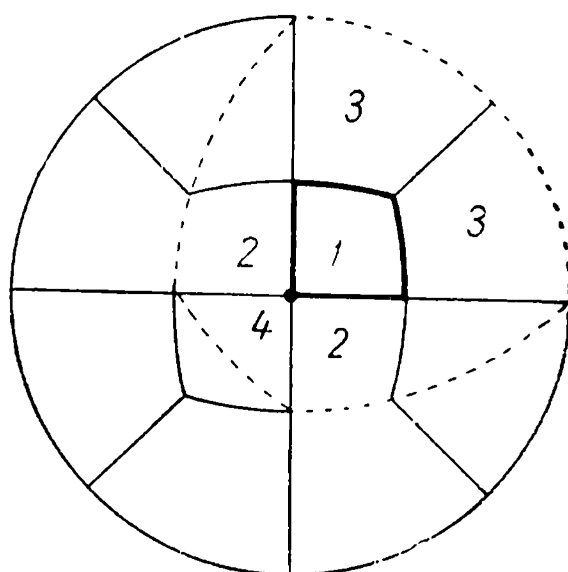
Фиг. 177.

Точно так же на фиг. 179 показана нумерация койлоэдров додекаэдрического отделения, и, наконец, на фиг. 180—182 (*II*, *III* и *IV*) — основные гоноэдры этого отделения.

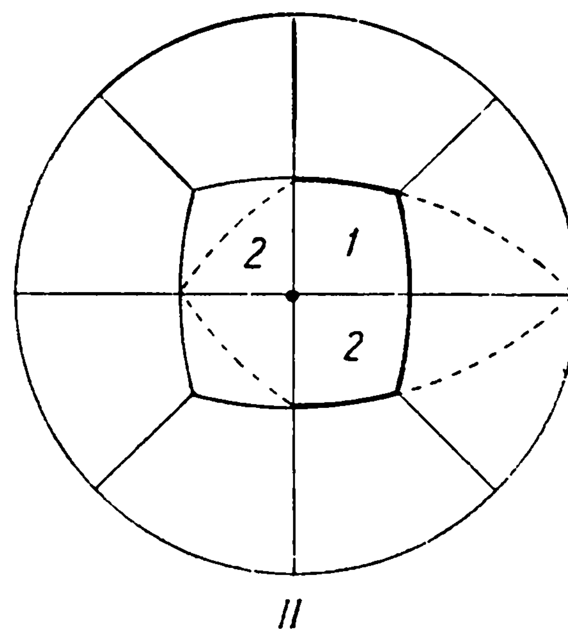
§ 100. Этим мы и ограничимся в нашем выводе фигур высшей степени, и только для примера решения вопросов с помощью начерченных схем мы зададимся вопросом о всех правильных многогранниках высшей степени.



Фиг. 178 (фиг. 70 по Бадуро).

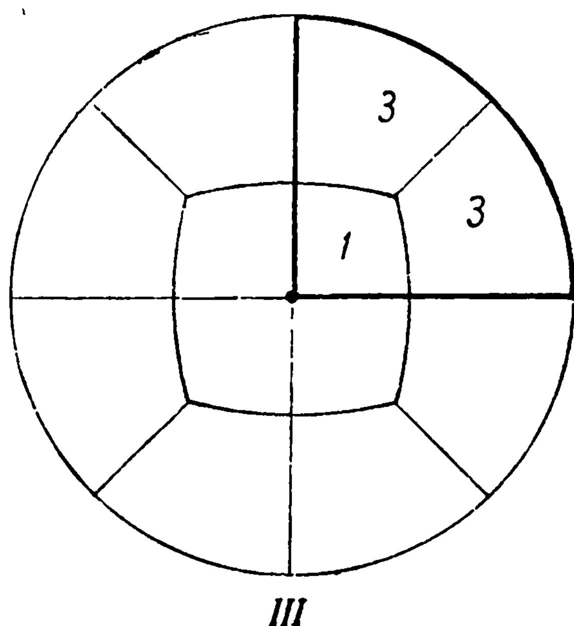


Фиг. 179.

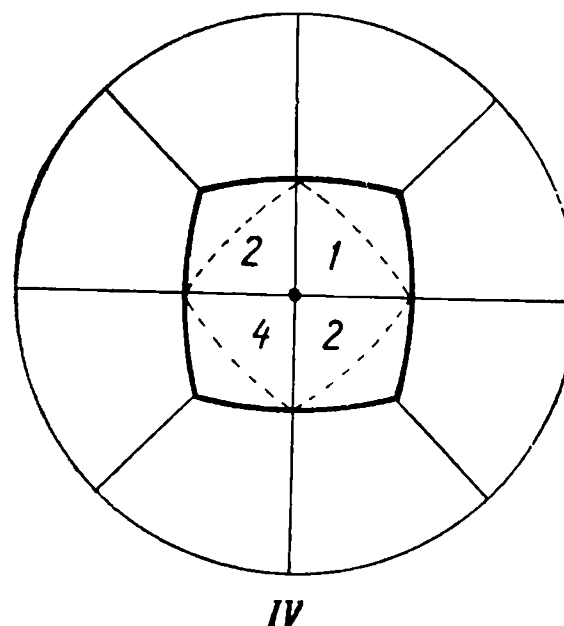


Фиг. 180.

Для этого докажем предварительно, что если существует правильный многогранник A какой угодно степени, то существует и выпуклый правильный многогранник X, имеющий одинаковые с A вершины.



Фиг. 181.

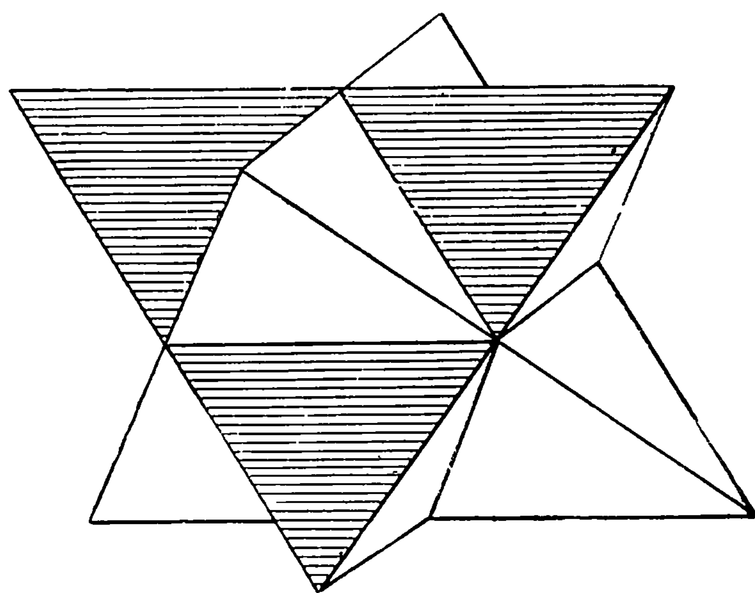


Фиг. 182.

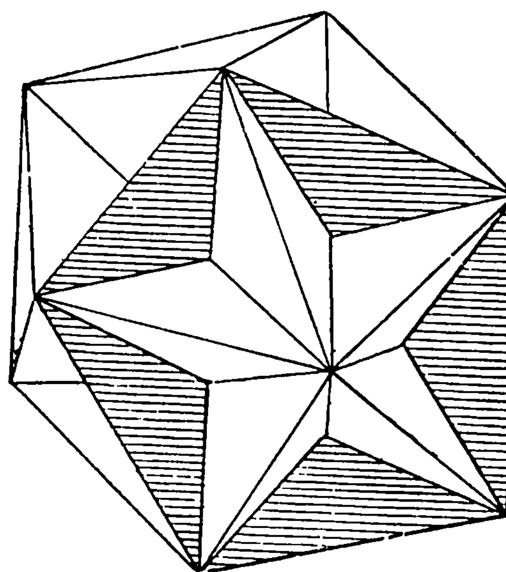
„Означим через P совокупность фигур, образованную обоими многогранниками зараз, а через Q — другую фигуру, тождественную с первой. Так как многогранник A правильный, то совмещение обеих фигур можно произвести, совмещая какую-нибудь вершину фигуры Q с определенною вершиною фигуры P, а из этого вытекает равенство всех гоноэдров выпуклого многогранника X. Кроме того, что две вершины совпадают, самое совпадение фигур может быть произведено не менее чем тремя различными способами, так как сами гоноэдры фиг. A, составляющие часть как P, так и Q, содержат не менее трех граней, и одну из граней одной фигуры можно совместить с любою гранью другой. Поэтому и гоноэдры выпуклой фигуры X не только равны между собою, но могут быть еще совмещены друг с другом не менее чем тремя разными способами; а так как их наименование может быть лишь 3, 4 и 5, то они по необходимости состоят из равных и равно наклоненных друг к другу граней.

„Итак, грани двух фигур X представляют собою многоугольники с равными и равно наклоненными друг к другу

сторонами, которые могут быть совмещены при совмещении какой угодно вершины Q с заданною вершиной P; другими

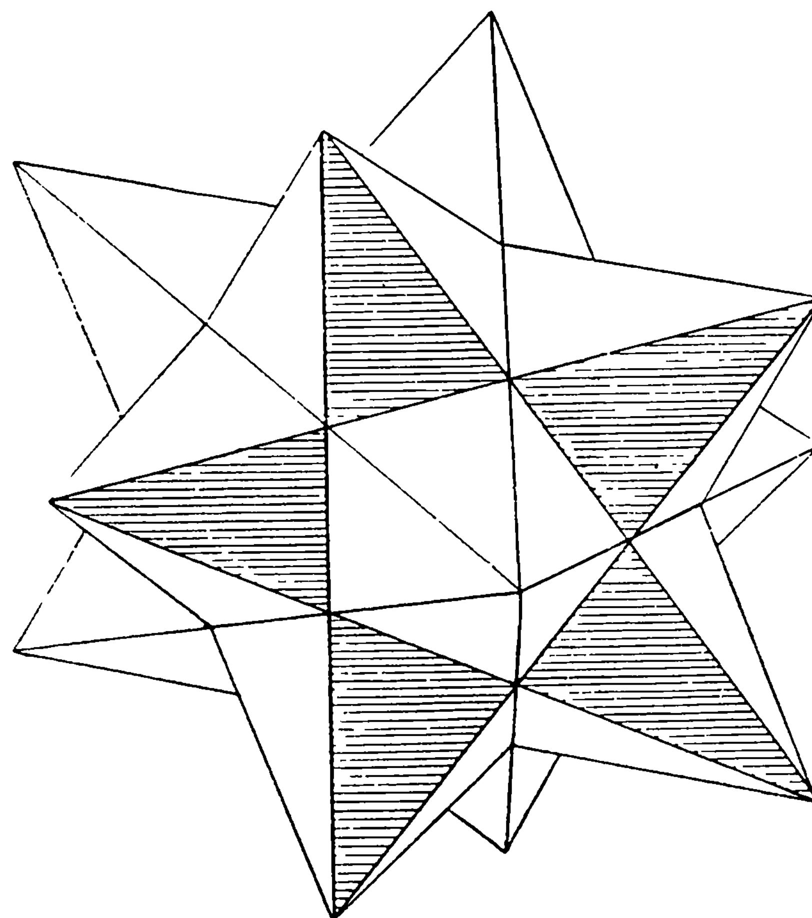


Фиг. 183. Правильный октаэдр второй степени.



Фиг. 184. Правильный додекаэдр I рода третьей степени.

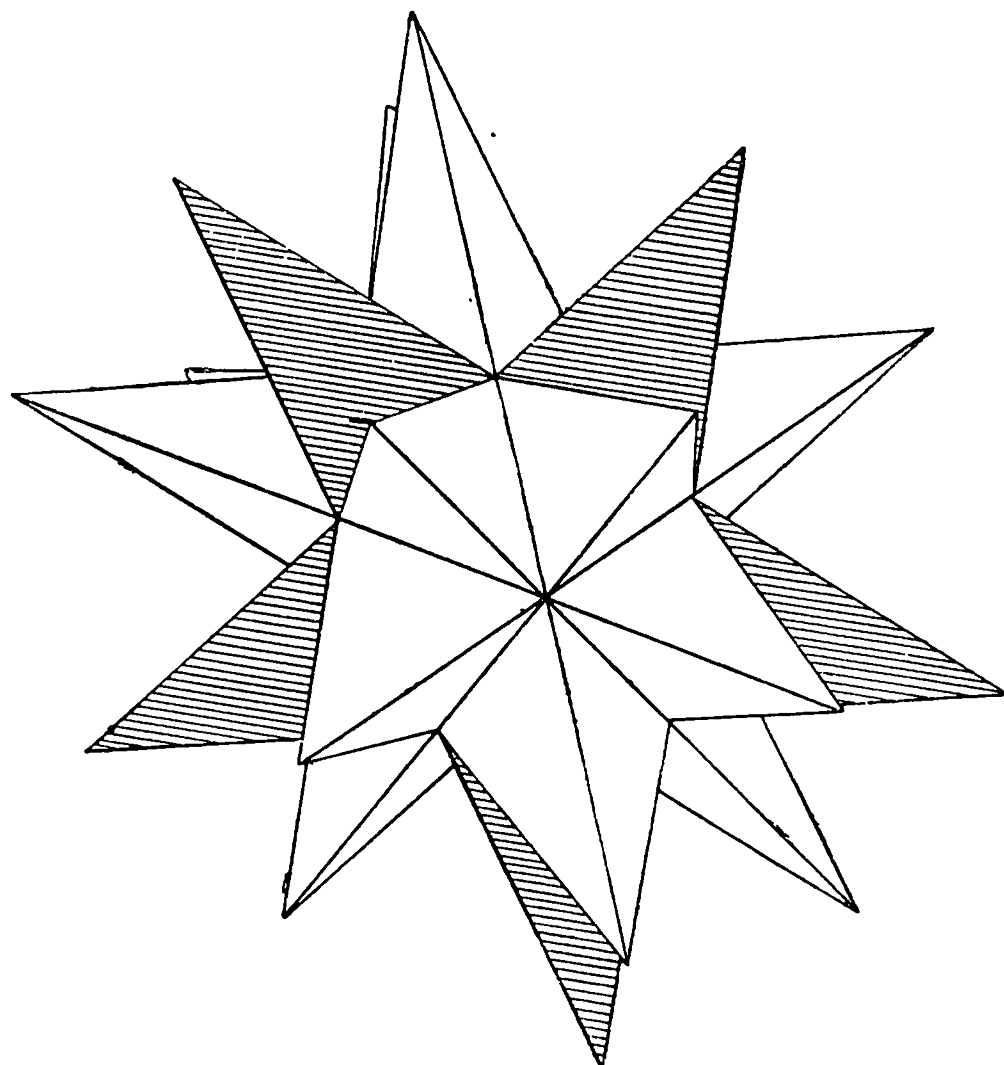
словами, грани эти представляют собою равные правильные многоугольники, а так как и гоноэдры фигуры X равны между собою, то, значит, сама фигура есть правильный многогранник".[1])



Фиг. 185. Правильный додекаэдр II рода третьей степени.

Отсюда следует, что правильные многогранники высшей степени суть формы одноименных с ними многогранников первой степени и потому весьма легко могут быть найдены из наших схем, в которых придется лишь отыскать точки, соот-

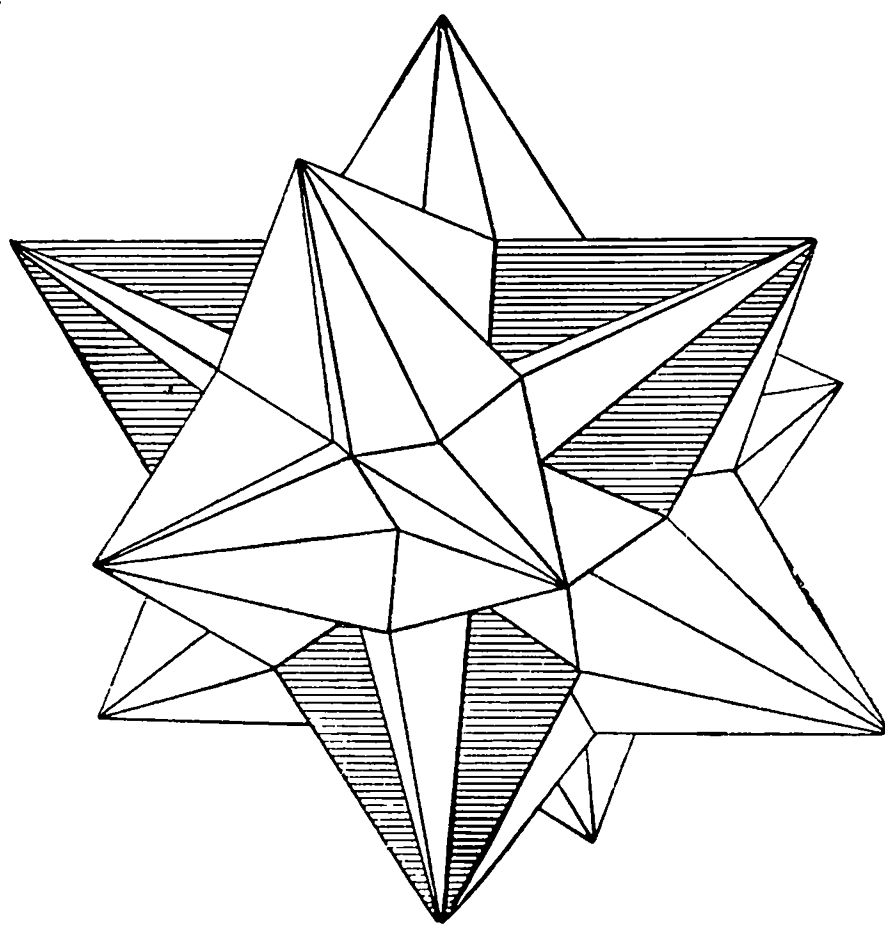
[1]) По Е. Руше́ и Ш. де Комберусс (E. Rouché et Ch. de Comberousse. Traité de Géometrie élementaire. 1866, стр. 560). При этом доказательстве подразумевается определение правильных многогранников, данное Коши (Cauchy, Journ. de l'Ec. polyt., тетр. 16, стр. 65), которое основано на возможности различного совмещения этих фигур.



Фиг. 186. Правильный додекаэдр седьмой степени.

ветствующие правильным многогранникам первой степени и находящиеся посреди тех дополнительных гоноэдров, соответственно которым может получиться многогранник высшей степени, удовлетворяющий определению правильного.

В схеме системы кубооткаэдрической существует только одна такая точка, обозначенная на фиг. 127 знаком O_2. Принимая ее за центр грани, касательной к сфере в этой точке и выходящей наружу в пределах основного гоноэдра, и построив по плоскостям и осям симметрии все другие части этой грани, выходящие наружу, мы легко убедимся, что полученная грань будет правильный треугольник, а гоноэдры — также правильные и равные между собою. Следовательно, эта форма будет действительно правильным октаэдром высшей, а именно второй степени, что легко определить по общей формуле для таких многогранников $2E + r = \varepsilon n + ef$,



Фиг. 187. Правильный икосаэдр седьмой степени.

где $\varepsilon=1$ и $e=1$, $n=8$ и $f=8$, а $r=12$. Фигура эта представлена на фиг. 183. Соответствующая ей подтипическая фигура будет она же сама.

Переходя теперь к системе додекаэдроикосаэдрической, мы находим внутри дополнительного гоноэдра три точки, соответствующие додекаэдру, и шесть точек, соответствующих икосаэдру (фиг. 130). Первые три точки действительно дают правильные фигуры по сделанному определению, но из последних шести точек только одна, означенная знаком $\triangle$, выражает собою фигуру правильную, а грани остальных фигур уже не будут правильные многоугольники. Все найденные четыре фигуры изображены на фиг. 184—187, на которых обозначены и их степени, легко находимые по только что приведенной формуле.

Так как оставшиеся пять форм икосаэдра уже не представляют собою правильных фигур, то мы видим отсюда, что в понятии правильной фигуры высшей степени лежит некоторая искусственность.

Нетрудно видеть, что четыре найденные фигуры естественно разделяются на две пары фигур соотносительных, т. е. если одна фигура пары будет типическая, то другая, соответственная ей, — подтипическая, и наоборот; отсюда видна и необходимость попарного равенства степеней.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Те же гоноэдрические зеркала, о которых упомянуто на стр. 224 и которые служат для воспроизведения различных типических изоэдров, могут служить и для воспроизведения изокойлоэдров: стоит лишь так наклонить зеркало, чтобы нормаль к уровню жидкости вышла из пределов зеркала. Ориентируя зеркало приличным образом, можно воспроизвести и изокойлоэдры, поверхность которых одинакова с внешнею поверхностью правильных многогранников высшей степени, почему они с виду и не отличимы от последних.

ПРИЛОЖЕНИЯ



ПОСЛЕСЛОВИЕ

Публикуемый в настоящем издании первый крупный труд гениального русского ученого Евграфа Степановича Федорова „Начала учения о фигурах“ занимает исключительное положение в его научном наследии. В этом труде, создававшемся Е. С. Федоровым в течение десятилетия, с 1869 по 1879 г., и опубликованном только через шесть лет, в 1885 г., в „Записках Минералогического общества“, заложены основания большинства его главнейших достижений по геометрической кристаллографии и теории структуры кристаллов.

Первые два отдела книги содержат изложение учения об открытых и сомкнутых фигурах, которое послужило основанием для последующего развития учения о формах кристаллов; третий отдел, посвященный изложению учения о симметрии фигур, явился основой развития Е. С. Федоровым учения о симметрии кристаллического строения, и, наконец, четвертый отдел, в котором излагается федоровское учение о выполнении плоскости и пространства, положен Е. С. Федоровым как фундамент при разработке им теории структуры кристаллов.

Появление в конце прошлого века „Начал“ Е. С. Федорова по праву признается крупнейшими авторитетами русской и мировой науки как переломный момент в развитии кристаллографии, когда она из описательной науки („служанки минералогии“) превратилась в строгую и самостоятельную науку о кристаллическом веществе, его строении, свойствах и усло-

виях образования. Все последующее бурное развитие кристаллографии в XX в., связанное с открытием точных методов определения структуры кристаллов путем изучения диффракции рентгеновых лучей, явилось триумфом созданной Е. С. Федоровым теории структуры кристаллов. Передовая советская кристаллография и в настоящее время движется вперед на основе дальнейшего развития федоровского учения.

В настоящем издании воспроизводится оригинальный текст „Начал учения о фигурах“ по публикации в „Записках Минералогического общества“ (2-я серия, т. 21, стр. 1—279, 187 фиг. и одна таблица, 1885).

При подготовке к печати редакция сочла возможным внести следующие изменения в оригинальный текст: исправлены опечатки и описки согласно списку недосмотров, приложенному Федоровым в конце своей книги, на стр. 278—279; исправлены мелкие опечатки и описки в тексте и на рисунках, не замеченные автором, но не вызывавшие сомнений у редакции; согласованы в некоторых местах буквенные обозначения текста и рисунков; рисунки, помещенные в оригинале на отдельных таблицах в конце книги, размещены в соответствующих местах текста; в связи с этим ссылки на рисунки (номера фигур) с полей перенесены в текст и изменены номера некоторых рисунков; в тексте выделены курсивом все формулировки теорем, как это в более поздних своих работах обычно делал Е. С. Федоров; в оглавление вставлены некоторые заголовки между параграфами, пропущенные в оригинале.

К книге добавлен краткий предметный указатель.

О. М. Аншелес, И. Й. Шафрановский
и *В. А. Франк-Каменецкий*

„НАЧАЛА УЧЕНИЯ О ФИГУРАХ“ Е. С. ФЕДОРОВА И ИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

Классический труд гениального русского ученого Евграфа Степановича Федорова (1853—1919) — „Начала учения о фигурах“ занимает исключительное положение в его научном наследии.

„Начала“ — первая капитальная монография Е. С. Федорова, над которой он упорно работал многие годы. В ней заложены ростки почти всех последующих крупнейших достижений автора, явившихся исходными вехами для зарождения современной, федоровской кристаллографии.

„Пришел я к этой теме, — писал в 1904 г. Е. С. Федоров, — исходя из наслаждений, испытанных мною при ближайшем изучении изящных соотношений между геометрическими фигурами; изучение же было вызвано отчетливым сознанием аналогии между тем, что мы называем телесными или пространственными фигурами (трех измерений) и фигурами на плоскости (двух измерений). Нельзя было с первого же взгляда не заметить того удивительного невнимания, почти пренебрежения, которое в интеллекте даже людей чистой науки выпало на долю первых по сравнению со вторыми. Здравый смысл требовал бы обратного, так как при всей аналогии, разнообразие самих фигур и связанных с ними вопросов геометрии несравненно больше в вопросах, касающихся пространства, чем плоскости. Вот эта-то, казалось бы, чисто математическая гармония и заняла мой ум в

начале моих робких научных попыток, 35 лет тому назад".[1])

Вопросы, изложенные в „Началах учения о фигурах", Е. С. Федоров стал разрабатывать еще шестнадцатилетним юношей, в то время, когда он еще был учеником гимназии и затем слушателем военно-инженерного училища. Позднее Федоров неоднократно подчеркивал, что разработку учения о телесных фигурах и его приложений к кристаллографии он ведет с 1869 г. И только через десять лет, в 1879 г., Федоров заканчивает „Начала" и решается передать свое детище „на суд ученой публики".

Эти годы — годы расцвета таланта Е. С. Федорова, годы его творческих научных исканий и активной революционной деятельности. Связанный с созданием „Начал" период жизни Федорова завершился в 1880 г. поступлением его на третий курс Петербургского горного института, после чего он целиком посвятил себя изучению кристаллов.

В настоящей статье мы попытаемся показать, какое значение имели вопросы, впервые рассмотренные Е. С. Федоровым в „Началах учения о фигурах", для кристаллографии, и выяснить, как их дальнейшее развитие в работах ученого привело к созданию им новой — современной, федоровской кристаллографии, бурный расцвет которой наблюдается в настоящее время и особенно отчетливо виден в успехах этой науки в нашей стране.

Но перед этим уместно дать краткую биографическую справку, характеризующую этот период жизни Е. С. Федорова (1869—1880 гг.).[2])

---

[1]) Е. С. Федоров. Из итогов тридцатипятилетия. Речь и отчет, читанные в годичном собрании Московского сельскохозяйственного института 26 сентября 1904 г. М., 1904, стр. 2.

[2]) Основная литература о Е. С. Федорове: Аншелес О. М. и И. И. Шафрановский. Евграф Степанович Федоров. Уч. зап. ЛГУ, № 45, сер. геолого-почв. наук, вып. 8, стр. 5—15, 1941. — Никитин В. В. Евграф Степанович Федоров. Изв. Геолог. комитета, т. 38, № 4—7,

Первый год работы над „Началами учения о фигурах“ связан с пребыванием Е. С. Федорова сперва во Второй военной гимназии, а затем в Николаевском инженерном училище в Петербурге, куда он поступил в 1869 г. Окончив в 1872 г. училище, он поступает на следующий год вольнослушателем в Медико-хирургическую академию. Сдав экзамены за первый курс, Е. С. Федоров оставляет Академию и поступает на второй курс химического отделения Технологического института. Здесь он углубляется в занятия химией и в течение двух лет выполняет все лабораторные работы, предусмотренные программой.

В 1876 г. Федоров становится членом организации „Земля и воля“ и принимает активное участие в революционной подпольной работе. В это же время он покидает Технологический институт, вероятно в связи с тем, что его научные устремления целиком захвачены исследованиями по геометрии многогранников. Эти исследования и привели Федорова в соприкосновение с кристаллографией. Они же заставили его в 1880 г., в возрасте 27 лет, поступить на третий курс Петербургского горного института и целиком связать свою будущую деятельность с кристаллографией и геологическими науками.

Мы уже отметили выше, что „Начала учения о фигурах“ были закончены Е. С. Федоровым в 1879 г. Содержание своего труда молодой ученый частично докладывал на заседаниях Всероссийского Минералогического общества в 1881—1883 гг.[1]) Данное исследование не встретило, к сожалению, поддержки у отдельных представителей кристаллографии, минералогии и математики тогдашнего Петербурга, что Е. С. Федоров с горечью отмечает в предисловии к „Началам“ (стр. 19 настоящего издания).

стр. 429—467, 1919.—Ш а ф р а н о в с к и й И. И. Е. С. Федоров— великий русский кристаллограф. Изд. „Сов. наука“, М., 1945, 92 стр. — Ш а ф р а н о в с к и й И. И. Е. С. Федоров. Изд. АН СССР, 1951, 282 стр.

[1]) См. протоколы ряда заседаний Минералогического общества за 1881—1883 гг., которые цитированы далее, в примечании 4 (стр. 391).

Несколько позднее (в 1883 г.) рукопись „Начал учения о фигурах" была высоко оценена крупнейшим русским кристаллографом и военным специалистом акад. А. В. Гадолиным и представлена им к печати в изданиях Минералогического общества. А. В. Гадолин (1828—1892) прославился в свое время как автор осуществленного им в 1867 г. вывода 32 видов симметрии кристаллов. Он первый оценил выдающееся значение труда Федорова для кристаллографии и минералогии и настоял на его опубликовании в старейшем русском минералогическом журнале, уже тогда пользовавшемся всемирной известностью. Вследствие обширности этого сочинения, его печатание продолжалось несколько лет. „Самый труд был окончен еще до 1883 г., а в этом году началось его печатание, хотя появился он в первой половине 1885 г.", — писал позднее Е. С. Федоров,[1]) отстаивая приоритет своих научных достижений.

В самом деле, за шесть лет (1879—1885), которые прошли между окончанием „Начал" и их напечатанием, некоторые вопросы, изложенные Федоровым впервые, были повторены заграничными учеными. Федоров в своих статьях и особенно в письмах к отдельным ученым[2]) неоднократно указывал на это обстоятельство.

„Начала учения о фигурах" вышли из печати в первой половине 1885 г., заполнив целый том „Записок Минералогического общества". Сам Е. С. Федоров впоследствии (1897) так охарактеризовал назначение своего сочинения: „Сочине-

---

[1]) Е. С. Федоров. Симметрия конечных фигур. Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 25, стр. 2, 1889. Переиздано в 1949 г. в книге: Е. С. Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Изд. АН СССР, 1949, стр. 59.

[2]) См. по этому поводу переписку Федорова с Вульфом и Шенфлисом: Г. Б. Бокий и И. И. Шафрановский. Материалы по истории русской кристаллографии. (Из Архива Е. С. Федорова). Сб. „Научное наследство", т. 2, 1951, стр. 297—354. См. также примечание 50 (стр. 394 в настоящем издании).

ние это не требует никаких предварительных сведений, кроме элементарной геометрии, и составляет, в сущности, не что иное, как дополнительный курс этой науки, упускавшийся по странной нелогичности истории науки в течение столь многих столетий. В основе всего изложения лежит понятие об измерении телесного угла, совершенно аналогично тому, как выводы планиметрии имеют в основании понятие об измерении плоских углов. Кроме общих оснований учения о фигурах, здесь изложены начала учения о симметрии, о поясах, о выполнении плоскости и пространства равными фигурами и о многогранниках высшей степени. Сочинение это излагает, между прочим, все те части учения о фигурах, которые составляют основание современной кристаллографии и отсутствие которых делало до сих пор из кристаллографии сборник геометрических истин, будто бы выводимых из опыта“.[1])

Е. С. Федоров подчеркивал,[2]) что чисто геометрические разделы этой книги (глава, заключающая полный вывод типических изоэдров и подтипических изогонов, и другая, вытекающая из нее глава, заключающая в себе полный вывод видов симметрии) должны входить в элементарные курсы геометрии и преподаваться в средней школе. В то же время он неоднократно отмечал, что только практические требования кристаллографии и минералогии привели его к дальнейшему развитию математических учений, впервые рассмотренных в „Началах учения о фигурах“.

В этом отношении очень интересна следующая, во многом автобиографическая, цитата из сочинения Е. С. Федорова, написанного им в связи с сорокалетием со времени начала его творческих исканий:

„Кристаллографы не нашли у чистых математиков разработанными многих из тех отделов, без которых не могла обойтись кристаллография в своем поступательном движении,

[1]) Е. С. Федоров. Курс кристаллографии. Изд. 2-е, СПб., 1897, стр. XIII.

[2]) Там же, стр. VI.

и волей-неволей им приходилось самим браться за разработку отделов... Достаточно указать на учение о фигурах вообще и в особенности на учение о симметрии, учение о сингонии, учение о правильном выполнении плоскости и пространства — все учения чисто математические, но оставшиеся мало или отчасти абсолютно не затронутыми чистыми математиками. Не только значительные части этих учений были вообще разработаны кристаллографами, но некоторым из них этими специалистами положены первые основные камни".[1])

Интересно проследить, как отдельные разделы сочинения Е. С. Федорова развивались в его последующих трудах и какое они имеют значение в современной кристаллографии. С этой целью мы позволим себе кратко охарактеризовать содержание основных отделов „Начал учения о фигурах", останавливаясь и на последующей их разработке Е. С. Федоровым.

Первый отдел „Начал" посвящен открытым фигурам, т. е. таким пространственным фигурам, которые не могут самостоятельно образовать замкнутый многогранник. Приводятся определения, касающиеся телесных углов и их измерения. Вскрывается аналогия между свойствами плоских и телесных углов (гоноэдров). Рассматриваются различные типы гоноэдров и дается способ их измерения. Мы уже отмечали, что по мысли Федорова эти геометрические сведения должны входить составной частью в курс элементарной геометрии и преподаваться в средней школе.

Второй отдел „Начал" посвящен пространственным фигурам, отвечающим замкнутым многогранникам. В основу изложения автор кладет понятия о типических и подтипических многогранниках. Он вводит новые понятия — „изоэдр" и „изогон". Изоэдром, по Федорову, называется такой многоугольник, все грани которого симметричны или равны между

[1]) Е. С. Федоров. Кристаллография за сорок лет. Зап. Горн. инст., т. 2, вып. 5, стр. 369, 1909.

собой, а изогоном — такой, у которого все телесные углы (гоноэдры) равны или симметричны. Автор дает полный вывод всех возможных изогонов, типических изоэдров и их классификацию. Изогоны разделяются, согласно этой классификации, на тригоноэдрические, тетрагоноэдрические и т. д. Соответственные изоэдры называются тригональными, тетрагональными и т. д.

Учение о многогранниках было более подробно рассмотрено Е. С. Федоровым в специальной работе „Основания морфологии и систематики многогранников“.[1]) В указанном труде он так характеризует свои достижения в этой области: „При всяком другом основании для морфологии и классификации многогранников тела природы были бы недоступны для систематического изучения“.[2])

Приведем, кроме того, отдельные выдержки из составленного Федоровым краткого изложения содержания данного раздела книги, которые лучше всего раскрывают ее значение для развития учения о многогранниках:

„Здесь прежде всего имеется в виду ограничить изучение неисчерпаемого разнообразия многогранников индивидуальными группами, составляющими виды многогранников.

„Мы должны строго различать внутреннюю и наружную стороны граней и прямо параллельными считать только те, у которых одинаковы направления от внутренней к наружной стороне граней; те же, у которых направления эти прямо противоположны, мы называем обратно параллельными.

„Пользуясь этим, мы можем сказать, что многогранники принадлежат одному виду, если имеют одно и то же число прямо параллельных граней. Они могут иметь весьма разнообразную наружную форму и связаны друг с другом параллельным перемещением граней. Многогранники одного и того же вида, но различной наружной формы (видимо разнородные,

---

[1]) Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 30, стр. 241—331, 1893.

[2]) Там же, стр. 245.

см. дальше) считаются *разновидностями*. Совокупность же подобных многогранников составляет *индивидуальность*.

„По причине видимого разнообразия многогранников одного и того же вида, составляющего истинную морфологическую единицу, необходимо приурочить изучение к особенным, избранным представителям вида, преимущественно перед всеми остальными, заслуживающими подобного изучения. За такие *типические* многогранники я принимаю те, которые могут быть описаны около шара“.[1]

„В некоторых отношениях им (но не во всех) аналогичны по своему значению многогранники, которые можно вписать в шаре, т. е. подтипические; например все наиболее симметрические изогоны есть многогранники подтипические, подобно тому, как наиболее симметрические изоэдры — многогранники типические...“.[2]

„Следующею за *видом* морфологическою единицею является *род*. Под этим именем подразумевается совокупность видов, типические представители которых имеют одинаковое число соответственно одноименных и соответственно расположенных граней, так что каждой определенной грани наименования m одного типического многогранника соответствует определенная единичная грань того же наименования, а равно и каждой вершине и каждому ребру одного соответствует определенная единичная вершина и ребро каждого другого.

„За общий случай типического многогранника (как и всякого другого, заданного гранями определенного положения) приходится принимать тот, у которого все углы трехгранные (тригоноэдрический), потому что вообще только три плоскости пересекаются в одной точке, а всякая четвертая пересекает эту совокупность в трех других точках. В частных случаях те или другие, или даже все гоноэдры многогранника, имеют наименование выше чем три. Это многогранники *частные*.

---

[1]) Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 30, стр. 243—244, 1893.

[2]) Там же, стр. 245.

„Для того чтобы избегнуть затруднений, связанных с изучением частных многогранников, в учении о фигурах вводится понятие типического и измененного многогранника, получающегося в предположении, что некоторые, или даже все, грани типического подвергаются бесконечно малому перемещению, так избранному, чтобы многогранник сделался тригоноэдрическим... Понятие о типическом измененном многограннике не есть понятие вполне определенное и относится в сущности к весьма различным формам. Если мы произведем его посредством параллельного перемещения, то каждый типический измененный многогранник представит одну из разновидностей того же вида, впрочем, очень близкую к типической индивидуальности. Если же мы подвергнем грани типического [многогранника] бесконечно малому угловому изменению в пространстве, оставляя их касательными к одному и тому же шару, то возникнут новые виды, принадлежащие различным родам, а потому на такой типический многогранник можно смотреть, как на индивидуальность промежуточную, в которой скрещиваются представители различных родов.

„Если, вообще, подвергая некоторый многогранник постепенному изменению, мы перейдем от представителя одного рода к представителю другого рода, то в промежутке непременно находится некоторый частный многогранник, составляющий промежуточную индивидуальность“.[1])

Приведенные цитаты показывают, какие задачи ставил перед собой Е. С. Федоров, развивая учение о замкнутых многогранниках. Он развивал этот раздел геометрии главным образом для того, чтобы заложить основание под учение о формах природных многогранников — кристаллов.

Излагая в составленных им курсах кристаллографии[2]) учение о формах кристаллов, Е. С. Федоров использовал свои

---

[1]) Там же, стр. 246—247.

[2]) Е. С. **Федоров.** Краткое руководство по кристаллографии. Часть первая. СПб., 1891 (14), 98 стр., 234 рис., 1 табл. — Е. С. **Федоров.** Курс кристаллографии. Изд. 2-е, СПб., 1897, XVI + 376 стр. —

результаты, приведенные в „Началах“. Оригинальные обозначения, впервые введенные и объясненные в „Началах“, применяются им в последующих работах.

Третий отдел „Начал“ посвящен разбору учения о симметрии в приложении к пространственным фигурам. В этом отделе помещен оригинальный вывод всех возможных видов симметрии конечных фигур. Как частные случаи, здесь представлены и 32 вида симметрии, свойственные кристаллическим многогранникам.

В одной из своих последующих работ Е. С. Федоров отмечает, что „в «Началах учения о фигурах» сжатость изложения заставила автора ограничиться лишь тем, что было безусловно необходимо для вывода всех возможных видов симметрии конечных фигур, а потому многие существенные стороны учения о симметрии остались незатронутыми“.[1])

Отмеченные Е. С. Федоровым пропуски в изложении учения о симметрии в „Началах“ были в дальнейшем устранены им в серии статей, которые он объединил под общим заголовком „Начала анализа симметрии“ и опубликовал в 1888—1890 гг.[2])

Е. С. Федоров. Курс кристаллографии. Изд. 3-е, испр., СПб., 1901, III + 438 стр. — Е. С. Федоров. Сокращенный курс кристаллографии. СПб., 1910, 276 стр.

[1]) Симметрия конечных фигур. Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 25, стр. 2, 1889. — Е. С. Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Изд. АН СССР, 1949, стр. 59.

[2]) В состав этой серии входят следующие работы: 1) „Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде“. Впервые издано отдельной брошюрой в 1888 г. в Петербурге. 2) „Симметрия конечных фигур“. Впервые опубликовано в „Записках Минералогического общества“ (2-я серия, т. 25, стр. 1—52, 1889). 3) „Симметрия правильных систем фигур“. Впервые опубликовано в „Записках Минералогического общества“ (2-я серия, т. 28, стр. 1—146, 1891). 4) „Симметрия на плоскости“. Впервые опубликовано в „Записках Минералогического общества“ (2-я серия, т. 28, стр. 345—390, 1891). Все эти сочинения, за исключением последнего, переизданы в сб.: Е. С. Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Изд. АН СССР, 1949.

Ученый подчеркивал единый план всей этой серии сочинений и тесную связь с „Началами“, отмечая, что „совокупность всех перечисленных статей дает общий метод всестороннего исследования симметрии геометрических образов“.[1]

Отличительной чертой федоровского метода анализа симметрии является то обстоятельство, что он впервые применил (1888) к ее изучению способ алгебраического анализа. С этой целью Е. С. Федоров, исходя из новых положений в аналитической геометрии, сводящихся к усложнению понятия о независимой координате, вывел свои „основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде“, которые и использовал для вывода алгебраических уравнений, характеризующих каждую группу симметрии конечных и бесконечных фигур на плоскости и в пространстве.

В четвертом отделе „Начал“ излагается федоровское учение о выполнении плоскости и пространства особыми фигурами, которые им названы соответственно параллелогонами и параллелоэдрами. Это учение послужило основой для последующей разработки Е. С. Федоровым теории кристаллической структуры и непосредственно вытекающего из нее величественного здания построенной им позднее первой естественной классификации всего мира кристаллов. Именно этот отдел должен рассматриваться как эмбрион, в котором содержатся основы современной федоровской кристаллографии.

Действительно, в этом отделе Е. С. Федоров впервые в полном виде устанавливает закон выполнения пространства. Он выводит телесные фигуры (многогранники), которые целиком выполняют пространство, будучи равными, параллельно расположенными и смежными по целым граням. Называя такие фигуры параллелоэдрами, он устанавливает, что мыслимы только четыре типа таких многогранников —

---

[1]) Е. С. Федоров. Симметрия на плоскости. Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 28, стр. 346, 1891.

трипараллелоэдры (кубы и их деформации), тетрапараллелоэдры (гексагональные призмы и их деформации), гексапараллелоэдры (ромбические додекаэдры и их деформации) и гептапараллелоэдры (кубо-октаэдры и их деформации).

Дальнейшее развитие учения о параллелоэдрах, как чисто геометрической задачи, мы находим в мемуаре крупнейшего русского математика Г. Ф. Вороного „Исследования о примитивных параллелоэдрах" (1908—1909)[1] и в ряде посвященных этой же проблеме исследований советских геометров Б. Н. Делоне, О. К. Житомирского и А. Д. Александрова.[2])

Решив задачу о выполнении пространства параллелоэдрами, Е. С. Федоров перешел впоследствии к построению своей теории структуры кристаллов.

Рассматривая кристаллы состоящими из параллелоэдров, он все их многообразие сводит к четырем родам структур — кубической, додекаэдрической, кубо-октаэдрической и призматической. Эти четыре рода структур распадаются на два основных типа — кубический и гипогексагональный. Кристаллы, обладающие призматической структурой, относятся, по Федорову, к гипогексагональному типу, а кристаллы трех других структур — к кубическому типу. Кристаллы кубического типа, в свою очередь, делятся на т е т р а г о н а л о и д н ы е (кубическая, тетрагональная, ромбическая, моноклинная и триклинная сингонии) и т р и г о н а л о и д н ы е (тригональная, моноклинная и триклинная сингонии). Гипогексагональные кристаллы включают все г е к с а г о н а л о и д н ы е кристаллы (гексагональная, ромбическая, моноклинная и триклинная сингонии).

---

[1]) См.: Г. Ф. В о р о н о й, Сочинения, т. II, Изд. АН УССР, Киев, 1952, стр. 239. — Б. Н. Д е л о н е. Петербургская школа теории чисел. Изд. АН СССР, 1947, стр. 197—318.

[2]) Работы Б. Н. Делоне опубликованы в „Трудах" Международного съезда математиков в Торонто (1924), в „Известиях АН СССР" (1929 и 1933 гг.) и в „Известиях АН СССР" (серия математическая, 1934). Работа О. К. Житомирского опубликована в „Журнале Ленинградского математического общества" (1927), а статья А. Д. Александрова — в „Известиях АН СССР" (1934).

Любой кристалл рассматривается Е. С. Федоровым как результат деформации (растяжение и сдвиг) параллелоэдров структуры. Все растяжения и сдвиги, которые необходимо произвести для перехода от параллелоэдра, отвечающего кристаллу того или иного вещества, к основному параллелоэдру (одному из четырех), определяется специальной формулой — символом комплекса.

Таким образом, символ комплекса того или иного кристалла, по Е. С. Федорову, определяет его положение в естественной (структурной) классификации всего многообразия кристаллов, которую Е. С. Федоров ввел на смену существовавших до этого классификаций, основанных только на симметрии (виды симметрии и сингонии).

Параллелоэдры не представляют конечного предела деления кристаллического пространства. Их можно разделить на такие части, которые заполняют пространство не в параллельном положении и которые Е. С. Федоров назвал стереоэдрами.[1])

Решая задачу о мыслимых способах размещения параллелоэдров и стереоэдров в кристаллических телах, Е. С. Федоров устанавливает понятие о правильных системах фигур и правильных системах точек. Из правильных систем фигур он выводит в „Началах“ все подразделения кристаллографических систем. Полный вывод всех 230 правильных систем фигур, как известно, дан Федоровым несколько позднее[2]) и впервые опубликован в работе „Симметрия правильных систем фигур“.[3]) Оценивая проделанную работу, Е. С. Федоров писал в предисловии к ней: „Первые результаты математической теории

[1]) См. настоящее издание, стр. 285, 308 и др.

[2]) Историю этого вывода см. в статье Г. Б. Бокия и И. И. Шафрановского в кн.: Е. С. Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Изд. АН СССР, 1949, стр. 587—588.

[3]) Е. С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур. Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 27, стр. 1—146, 1891. — Е. С. Федоров. Основные работы по симметрии и структуре кристаллов. Изд. АН СССР, 1949, стр. 111—258.

правильных систем точек есть в то же время и первый триумф человеческого ума в области изучения кристаллов, так как выводы, шедшие из глубины кабинета, совпали как раз с тем, что составляло результат обширного опыта, принявшего со временем колоссальные размеры. Перед строгими кабинетными выводами как бы преклонилась природа, и кристаллы расположились в тех системах, которые явились необходимым математическим выводом из понятия о правильных системах точек (пространственных решетках)".

„Кабинетные выводы", о которых говорит Е. С. Федоров, составляют на деле гениальное обобщение опытного материала всей кристаллографии того времени.[1])

---

[1]) В этих словах нашла свое отражение борьба Е. С. Федорова с ложным философским течением — „позитивизмом". Последователи этого направления усиленно рекламировали, что они опираются не на абстрактные умозаключения, а на „опыт", т. е. на „положительные" („позитивные") факты. Вместе с тем, позитивисты считали, что в опыте мы имеем дело не с материальными предметами и явлениями, а лишь со своими субъективными ощущениями и переживаниями. Отсюда вытекала реакционнейшая, типично идеалистическая идея о невозможности выйти за пределы ощущений, т. е. о непознаваемости сущности явлений. Роль науки позитивисты сводили к голому описанию фактов без всякого их объяснения. К. Маркс резко осудил это учение, охарактеризовав систему взглядов главы позитивизма О. Конта как „нечто жалкое". К. Маркс и Ф. Энгельс, Избранные письма, 1947, стр. 180 (письмо к Ф. Энгельсу от 7 июля 1866 г.). Ленин дал сокрушительную критику позитивизма в своем гениальном труде „Материализм и эмпириокритицизм". Е. С. Федоров, углубленно занимаясь вопросами естествознания, стоял на позициях материализма и понимал антинаучный характер позитивизма. „Я лично со словом «позитивизм» связал недоверие, почти пренебрежение к стройному человеческому уму", — писал он в статье „Из итогов тридцатипятилетия" (1904, стр. 7).

Такое течение, по мнению Е. С. Федорова, являлось „ошибочным и вредным". С ним связаны были застой и даже движение вспять в науке о кристаллах. Типичными позитивистами в кристаллографии Е. С. Федоров считал немецких ученых — Вейсса и Науманна, отказавшихся от атомистической теории строения кристаллов и целиком базировавшихся на поверхностных наблюдениях над внешней формой кристаллов. Четкий

Е. С. Федоров не ограничился разработкой теории строения кристаллов. Его большая заслуга заключается также в том, что он связал эту теорию с геометрическими и физическими свойствами кристаллов, положив в основу науки о кристаллах их строение. Е. С. Федоров коренным образом преобразовал кристаллографию.

Из „сборника геометрических истин“, представляющих ряд эмпирически подмеченных закономерностей, из науки только о внешней форме кристаллов, геометрическая кристаллография превратилась в строгую и стройную дедуктивную науку. Сам Е. С. Федоров так характеризовал эти коренные преобразования: „Изложение приобретает характер не догматического, а строго дедуктивного, по крайней мере в тех частях науки, которые образовались в одно математическое целое. Возможность такого изложения должна сделать очевидною справедливость высказывающегося все чаще и чаще мнения авторитетов: «Здание кристалловедения возвышается в настоящее время между всеми отделами физики по своей теоретической обработанности и является одним из главнейших опорных пунктов для понимания неорганической природы вообще и в особенности строения веществ»“.[1])

ответ самого Е. С. Федорова на вопрос об отношении к опытным данным мы находим в следующей его фразе: „Если мысль раскрыть законы природы одною внутреннею интуицией, хотя бы и с помощью поверхностных наблюдений, но без приложения специально поставленных экспериментов, несомненно ошибочна, то и расцветшая в прошлом веке противоположная крайность эмпиризма, низводящего значение ума на пустую форму для более удобного укладывания собираемого опытного материала, не менее ошибочна и вредна для развития науки“ (там же, стр. 3). С этой точки зрения становится понятной и нижеследующая цитата из той же статьи Е. С. Федорова, подчеркивающая торжество развиваемых им идей: „Какой глубоко знаменательный факт! Истиною оказался математический кабинетный вывод, фантазиею же то, что считалось за непосредственный продукт наблюдения, явившийся, однако, при господствовавшем тогда недоверии, чуть не некотором презрении к уму и его продуктам творчества“ (там же, стр. 13).

[1]) Е. С. Федоров. Курс кристаллографии. 1897, стр. III.

После Федорова кристаллография стала одной из наиболее строгих и стройных естественно-исторических наук.

Свои достижения в области теоретической кристаллографии Федоров стремился реализовать на практике, считая, что практическое применение теории является лучшим доказательством ее правильности — это привело Федорова к разработке оригинального метода кристаллохимического анализа.

Изучение законов выполнения пространства многогранниками позволило Е. С. Федорову разработать вопросы однозначной „структурной“ установки кристаллов („правильной установки“, по Е. С. Федорову) и выработать методы определения типа *федоровской структуры* — типа, соответствующего данному кристаллу параллелоэдра.

На основе этих достижений Е. С. Федоров и создал новый метод кристаллохимического анализа, который, по словам нашего крупнейшего химика проф. А. А. Чугаева, составляет гордость русской науки.[1])

Ученики и помощники Е. С. Федорова по этой работе Б. Орелкин и Г. Пигулевский так характеризуют преимущества кристаллохимического анализа перед обычными приемами химического анализа:

„Применение метода кристаллохимического анализа предполагает, что или само испытуемое вещество, или же один из его дериватов является веществом кристаллическим. Вместо того, чтобы получить характерный осадок или окрашивание, мы должны заняться выращиванием кристаллов... Получается возможность сразу распознавать вещество, для анализа которого обыкновенными приемами потребовалось бы и большое количество его, и сложное кропотливое исследование. Таким образом, благодаря гениальным работам Е. С. Федорова мы

---

[1]) См. предисловие к труду Е. С. Федорова „Кристаллохимический анализ на примерах“. Новые идеи в химии, сб. № 5, Пгр., 1914.

имеем новое могущественное орудие в деле познания природы“.[1])

Дальнейшая разработка федоровского учения об однозначной установке кристаллов была проведена уже после смерти Е. С. Федорова крупнейшим советским геометром Б. Н. Делоне (1932).[2])

Последние годы творчества Е. С. Федорова заполнены огромным трудом, который был проделан им и его сотрудниками (Д. Артемьев, Т. Баркер, Б. Орелкин, В. Соколов и др.) по составлению таблиц для кристаллохимического анализа под названием „Царство кристаллов“, вышедших уже после кончины Е. С. Федорова, в 1920 г., заполнив тридцать шестой том „Записок Российской Академии Наук“ (стр. 1—1050).

Важно подчеркнуть, что Е. С. Федоров всегда придавал особое значение практическому применению своих научных достижений. Говоря о значении разработанного им кристаллохимического анализа, он писал: „На этом примере еще и еще раз подтверждается то положение, что нет такой точной науки, которая в конце концов не давала бы человеку новой власти над природой“. Еще более характерна для Федорова следующая его фраза: „Когда начинают выясняться ближайшие практические следствия развиваемой теории, определяется то, что именно дает в руки власть над известным циклом явлений природы, то критерий правильности становится особенно осязательным, потому что задача каждой науки именно достижение такой власти, а потому научно истинно то, что дает эту власть“.[3])

---

[1]) Б. Орелкин и Г. Пигулевский. Применение кристаллохимического метода Е. С. Федорова в научной и практической работе. Новые идеи в химии, сб. № 5, Пгр., 1914.

[2]) Б. Н. Делоне, А. Д. Александров и др. Математические основы структурного анализа кристаллов. 1934, стр. 153—189 (гл. III. Теория правильной установки кристаллов).

[3]) Е. С. Федоров. Кристаллография за сорок лет. Зап. Горн. инст., т. 2, вып. 5, стр. 373, 1909.

Все свои труды Федоров стремился приложить к практике. Достаточно в этом отношении вспомнить роль федоровского теодолитного метода в кристаллографии, минералогии и петрографии, значение федоровского кристаллохимического анализа, приложение федоровских построений в области новой геометрии к физической химии, горному искусству и к другим дисциплинам.

Переворот в кристаллографии, вызванный открытием в 1912 г. диффракции рентгеновых лучей в кристаллах, блестяще подтвердил основные положения федоровской теории структуры кристаллов.

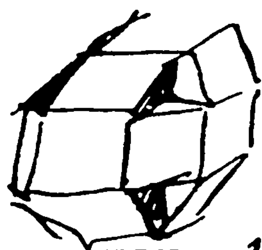
Первые определения простейших структур методами рентгеноанализа (1912—1914) показали, в чем состоит отличие реальных структур от схематических представлений, которые были возможны до этого.

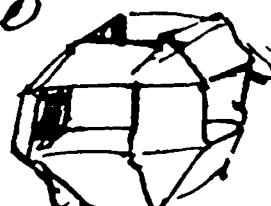
Сущность совершившегося перелома лучше всего охарактеризовал впоследствии сам Федоров: „Теория, которая первоначально была положена в основу кристаллохимического анализа, исходила из допущения, что на кристаллическое вещество можно смотреть, как на одну единственную пространственную решетку, узлы которой представляют центры тяжести некоторой группы атомов, представляющих собой кристаллическую частицу... Исследование кристаллов *X*-лучами, с одной стороны, блестяще подтвердило все основные построения теории структуры кристаллов (чем дало яркое доказательство значения человеческого ума в области точного предвидения), но, с другой стороны, заставило изменить некоторые из них, казалось бы имеющие существенное значение. Оказалось, что на кристаллы никоим образом нельзя смотреть, как на простые пространственные решетки частиц, так как каждый разряд атомов образует самостоятельные решетки“.[1])

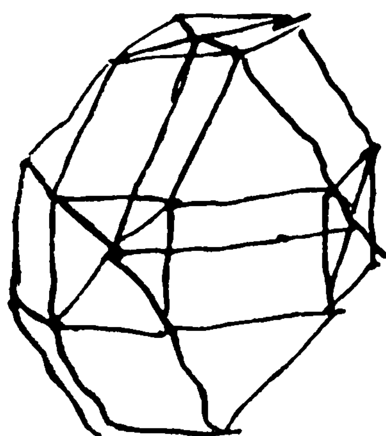
Вопрос о выполнении пространства многогранниками, впервые рассмотренный Е. С. Федоровым в „Началах учения

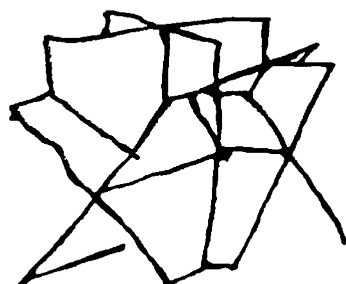
[1]) Е. С. Федоров. Предусматривание кристаллизации по расположению атомов. Зап. Горн. инст., т. 6, стр. 161—163, 1917.

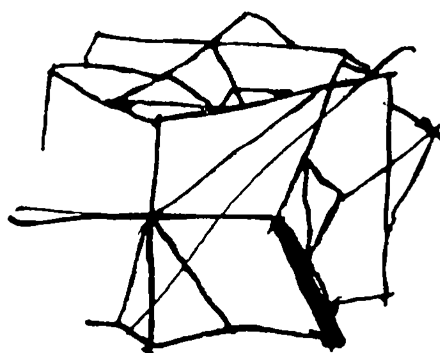
о фигурах" и потом разрабатывавшийся им в ряде работ, имеет очень большое значение для современной кристаллохимии. Координационные полиэдры в реальных кристаллических структурах и учение о плотнейших упаковках, особенно широко развивающееся в нашей стране,[1]) имеют своим основанием эти работы Е. С. Федорова.

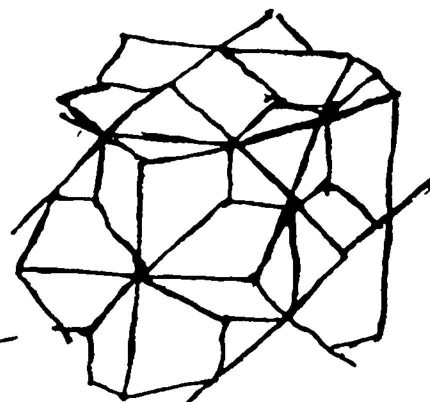


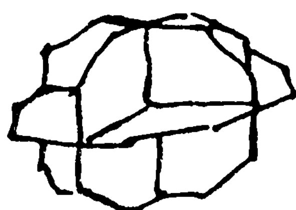


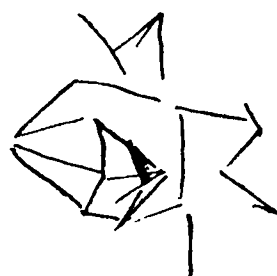












Собственноручные рисунки Е. С. Федорова из черновиков рукописи „Начала учения о фигурах".

1) Н. В. Белов. Структура ионных кристаллов и металлических фаз. Изд. АН СССР, 1947. См. также ряд статей Н. В. Белова, опубликованных в 1948—1951 гг. в „Докладах АН СССР" и в „Минералогических сборниках Львовского геологического общества".

Заканчивая обзор „Начал учения о фигурах“, следует еще раз подчеркнуть, что в них заложены основы современной кристаллографии — учение о форме и симметрии кристаллических многогранников и учение о структуре и симметрии кристаллического строения.

Блестящие достижения современной кристаллохимии, которая за последние 30—40 лет, пользуясь методом рентгеноструктурного анализа, определила атомную структуру основной массы представителей мира кристаллов, оказались возможными только после федоровских работ по геометрии кристаллических структур.

Таким образом, мы можем с полным основанием сказать, что два основных отдела современной кристаллографии, имеющих дело с кристаллическим многогранником (макрокристаллография) и атомным строением кристаллов (микрокристаллография), опираются на основы, которые разработаны во второй половине прошлого века нашим выдающимся соотечественником — крупнейшим кристаллографом Евграфом Степановичем Федоровым и впервые изложены им в „Началах учения о фигурах“.

В. А. Франк-Каменецкий

ПРИМЕЧАНИЯ

[1] (стр. 15). „Начала учения о фигурах“ вышли из печати в первой половине 1885 г., в виде отдельного тома „Записок Минералогического общества“ (2-я серия, т. 21, стр. 1—279, 187 фиг. и 1 таблица). Из автобиографических указаний Е. С. Федорова известно, что работа эта создавалась им с 1869 по 1879 г. Содержание работы автор частично докладывал на заседаниях Петербургского Минералогического общества в 1880—1883 гг. В 1883 г. это общество приняло постановление о напечатании „Начал учения о фигурах“ в „Записках“ общества.

[2] (стр. 17). Перевод: „Немножко эрудиции сберегло бы мне время, которое я потратил на изыскания известных результатов; я себя утешал, вспоминая с М. Каталаном о старой пословице, которая день ото дня становится более верной: ничто не ново под солнцем“.

[3] (стр. 18). Перевод: „Усовершенствовать в некоторых существенных пунктах геометрическую теорию полиэдров“.

[4] (стр. 20). См. протоколы заседаний Минералогического общества от 13 октября 1881 г., 16 ноября 1882 г., 15 февраля и 15 ноября 1883 г., опубликованные в „Записках Минералогического общества“, где приводится краткое содержание следующих сообщений Е. С. Федорова: 1) Теория двойников (т. 17, стр. 381, 1881); 2) Приложение теории кристаллической структуры к явлениям спайности и роста кристаллов (т. 18, стр. 281—283, 1882); 3) Гоноэдрические демонстративные приборы по кристаллографии (т. 19, стр. 181, 1884); 4) Об общих формулах проективности и работе Пфаффа о твердости минералов (т. 19, стр. 216—217, 1884); 5) О твердости минералов (т. 19, стр. 217, 1884).

[5] (стр. 20). Греч.: *гониа* — угол, *эдра* — грань; *гоноэдр* — гранный угол, образованный гранями, пространственный, не плоский. (См. также § 5, определение 10 и примечание „а“, стр. 35).

[6] (стр. 30). В оригинале на фиг. 3 дуга CA не проведена.

[7] (стр. 32). Для ясности напишем последнее несколько подробнее:

$$a + b > c;\ -a - c < -c;\ -a - b + 4d < -c + 4d;\ (2d - a) + (2d - b) < 2d + (2d - c).$$

[8] (стр. 33). Точка B' на сфере в данном случае диаметрально противоположна точке B. При этом сферический треугольник BAB' превращается в двухсторонник (трехгранный угол — в двугранный).

[9] (стр. 34). Последние строки для большей ясности представим так: Так как $a+b+c<4d$, то $(2d-A)+(2d-B)+(2d-C)<4d$ (см. определение 9, стр. 30). Отсюда $-A-B-C<4d-6d$, т. е. $-A-B-C<-2d$, или $A+B+C>2d$. Так как $a+b+c>0$, то $(2d-A)+(2d-B)+(2d-C)>0$. Отсюда $-A-B-C>6d$, или $A+B+C<6d$. Таким образом $2d<A+B+C<6d$.

[10] (стр. 36). Греч.: *полис* — многий (ср. определение 7, о правильном или тригональном угле, стр. 26).

[11] (стр. 37). Здесь, очевидно, должно быть: равных частей — b_1c_1.

[12] (стр. 46). См. следствие „a“ теоремы 10 (стр. 41).

[13] (стр. 46). См. следствие „d“ теоремы 10 (стр. 41).

[13'] (стр. 53). В оригинале на фиг. 16 прямая OE не проведена.

[14] (стр. 58). Имеется в виду следующее равенство: $B_1AC+B_1CA-AB_1C=D-CAD-ACD$. Так как правая часть равенства постоянна, то постоянна и левая часть.

[15] (стр. 63). Сфеноид от греч.: *сфена*. Тетраэдр — замкнутый четырехсторонник. Позднее тетраэдрами стали называть только те сфеноиды, которые являются простыми формами. Среди них различают тетраэдры с гранями в виде равносторонних, равнобедренных и разносторонних треугольников. Первые называются кубическими тетраэдрами, вторые — тетрагональными и третьи — ромбическими тетраэдрами.

[16] (стр. 65. То, что тригоноэдр равен полусумме составляющих его двугранных углов без 90°, было уже доказано в теореме 16 I отдела книги (см. § 8, стр. 45).

[17] (стр. 65). Ниже этот внешний угол обозначен через O_e.

[18] (стр. 65). $DD_1B_1A_2$ или, в следующей строке, $DD_1B_1A_1$ обозначает один и тот же двугранный угол между плоскостями A_1OA_2 и B_1OD, пересекающимися при продолжении прямой $DD_1 \parallel BC$. На фиг. 9 отсутствует O_e, о котором говорится далее. Подобным же образом и на других фигурах автор иногда упускает индекс e.

[19] (стр. 66). Необходимо иметь в виду, что $AC_1 \parallel BC$, $AD_1 \parallel BD$ и $OO_1 \parallel CD$.

[20] (стр. 67). См. теорему 16 (§ 8, стр. 45), α здесь — бесконечно малая величина.

[21] (стр. 75). В соответствии с теоремой 1 (§ 12, стр. 64), ΣB_s — сумма двугранных углов сфеноида.

[22] (стр. 75). По теореме 17 (§ 10, стр. 49), тетрагоноэдр равен полусумме двугранных углов без $2d$, а так как тетрагоноэдров в дисфе-

ноиде 6, то сумма углов дисфеноида равна $\Sigma B_d - 12d$, где ΣB_d есть сумма двугранных углов дисфеноида.

23 (стр. 92). Ср. следствие „b“ (стр. 80).

24 (стр. 96). В оригинале отмечено как следствие „c“.

25 (стр. 96). В оригинале отмечено как следствие „d“.

26 (стр. 96). См. формулы (1) и (14).

27 (стр. 98). Греч.: *изос* — равный, *эдра* — грань.

28 (стр. 98). Ср. определение типических многогранников (определение 9, стр. 79).

29 (стр. 99). Ср. определение подтипических многогранников (определение 13, стр. 84).

30 (стр. 102) Ср. формулу (17).

31 (стр. 102). Ср. формулу (10).

32 (стр. 103). По формуле (11).

33 (стр. 103). По формуле (15).

34 (стр. 105). По теореме 14 (стр. 91), $\Sigma P = 4d\,(n-2)$. Подставляя сюда из формулы (8a) значение h, получаем формулу (26a). Аналогично получим формулы (26b) и (26c).

35 (стр. 106). Формула (13) (см. стр. 95).

36 (стр. 108). По теореме 14 (стр. 91) и формуле (13) (стр. 95).

37 (стр. 108). По теореме 18 (стр. 50).

38 (стр. 112). Последнее равенство основывается на формуле Эйлера (стр. 94).

39 (стр. 118). Формула (30a) (стр. 110).

40 (стр. 119). Рассматриваемые здесь и далее отдельные случаи тригоноэдрических изогонов охарактеризованы Е. С. Федоровым выше, в начале данного параграфа (на стр. 118) по числу граней и вершин для всех десяти возможных случаев.

41 (стр. 130). Ср. формулу (30b) (стр. 110). В ней вместо i стоит j.

42 (стр. 130). В оригинале ошибочно указано: „...возможны 4 случая“.

43 (стр. 138). См. формулу (30c) (стр. 110).

44 (стр. 141). На стр. 128 читатель найдет пояснения к этим обозначениям.

45 (стр. 148). Классификации многогранников посвящена, кроме того, более поздняя работа Е. С. Федорова „Основания морфологии и систематики многогранников“ (Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 30, стр. 241—341, 1893).

46 (стр. 160). G_t здесь, очевидно, гоноэдр тетраэдра (вообще сфеноида) и G_o — гоноэдр октаэдра (вообще дисфеноида). Формула отвечает теореме 8 (стр. 74).

[47] (стр. 160). По теореме 17 (стр. 49) $G_t = \frac{3B}{2} - d$, где B — двугранный угол. Для тетраэдра $B = 70°31'44''$. Отсюда $G_t = 15°47'36''$. Значение 39° для G_o — не точно. Точнее $G_o = 38°56'32''$.

[48] (стр. 160). Более точно двугранные углы октаэдра равны 180 — — 70°31'44'' = 109°28'16''. Отсюда по той же формуле теоремы 17 (стр. 49) найдем не 39°, а более точную, указанную выше, величину $G_o = \frac{4B}{2} - 2d = 38°56'32''$.

[49] (стр. 161). Имеется в виду теорема 18 (стр. 50).

[50] (стр. 179). Учение о симметрии фигур, изложенное в настоящем отделе, в дальнейшем Е. С. Федоров развивал в серии статей, опубликованных в 1888—1891 гг. под общим заголовком „Начала анализа симметрии" (см. сноску на стр. 380). Большой интерес представляет нижеследующее, касающееся этого отдела книги, высказывание Е. С. Федорова в письме немецкому математику А. Шенфлису относительно примененного в „Началах учения о фигурах" метода вывода всех геометрических систем: „Обращаю Ваше внимание на то, что в этой работе выводятся не только кристаллографические, но и все геометрические системы симметрии, среди которых кристаллографические представляют только частный (простейший) случай. Этот полный вывод в моей книге появляется в первый раз,[1]) так как сама книга была сдана в печать в 1883 г., что видно из протокола заседаний имп. Минералогического общества от 7 января 1884 г.; вывод Кюри появился только в 1884 г.

„Таким образом, и в обработке правильных систем фигур (не только точечных систем) приоритет принадлежит моему вышеозначенному труду; не говоря о том, что в работе Кюри вопрос о возможных новых системах только упоминается, а не разрабатывается. Мой метод основывается на положении 3, стр. 124,[2]) моих «Начал учения о фигурах» и на выводе всех изогонов и типических изоэдров в 5-й главе там же, а особенно на формулах (30a, b, c), стр. 71.[3])

„От других методов мой метод, следовательно, существенно отличается своим строго элементарным характером. Подразделения, выведенные Гадолиным, выводятся из „бесконечных геометрических систем, охватывающих полностью параллелоэдры, а стереоэдры являются лишь частями параллелоэдров, разделенных по закону симметрии. Так как полные геометрические системы симметрии совершенно не связаны

[1]) Впоследствии вопрос о приоритете вывода точечных групп отпал в связи с открытием в 1892 г. труда Гесселя, опубликованного в 1830 г. (Прим. ред.).

[2]) В настоящем издании стр. 182. (Прим. ред.).

[3]) В настоящем издании стр. 110. (Прим. ред.).

с принципами образования групп вращения, я считаю Ваше мнение о том, что метод, применяемый Кюри, приблизительно тот же самый, ошибочным" (Г. Б. Бокий и И. И. Шафрановский. Сб. „Научное наследство", т. 2, 1951, стр. 320—321).

[51] (стр. 180). Здесь, в следствии, имеется некоторое противоречие с предыдущим примечанием Федорова. По этому примечанию, наименование (или, как часто говорит автор „Начал", порядок) оси определяется наименьшим углом поворота оси при совмещении фигур, а так как наименьший угол только один, то у данной оси и наименование может быть только одно. Если наименьший угол поворота 60°, то и наименование оси только $\frac{360°}{60°} = 6$. Так как $6 = 2 \cdot 3$, то фигура совместится также при поворотах $60° \cdot 2 = 120°$ и $60° \cdot 3 = 180°$, но отсюда не следует, что симметрия наименования 6 может быть заменена осями наименования 2 и 3, так как 120° и 180° не наименьшие углы совмещения. Всюду, где Федоров говорит, например, что шестерная ось „есть в то же время" и двойная, и тройная ось, он имеет в виду именно только то, что данная фигура совмещается сама с собой при повороте не только на 60°, но и на 180° и на 120°, а никак не то, что шестерная ось может заменяться двойной и тройной осью. Последнее могло повести к неправильным выводам.

[52] (стр. 181). Имеются в виду, как указано в теореме 2, сомкнутые фигуры, т. е. фигуры конечные, в отличие от бесконечных фигур, как например, кристаллическая решетка, в которых оси симметрии могут не пересекаться друг с другом.

[53] (стр. 182). Такой элементарной фигурой, или подтипическим многогранником является, например, на фиг. 45 (стр. 131) куб, полученный соединением указанных в определении трех точек, взятых на тройных осях симметрии, или октаэдр, полученный соединением точек на четверных осях.

[54] (стр. 183). Это примечание отсутствует в оригинальном тексте; оно имеется в списке недосмотров на стр. 279 книги.

[55] (стр. 185). Таким изоэдром является, например, гексакис-октаэдр (фиг. 41, стр. 126).

[56] (стр. 186). Ср., например, гексакис-октаэдр (фиг. 44, стр. 128), содержащий 3 четверные, 4 тройные, 6 двойных осей симметрии и 9 плоскостей симметрии (и центр инверсии), с гироэдром (фиг. 56, стр. 141), содержащим те же оси симметрии и также симметрично расположенные относительно друг друга, но не содержащем плоскостей симметрии (и центра инверсии).

[57] (стр. 186). Мероэдрическая фигура — имеющая половину граней. Ср. там же гексакис-октаэдр, 48-гранник (фиг. 41, стр. 126), с гироэдром 24-гранником (фиг. 56, стр. 141).

[58] (стр. 187). В дальнейших своих работах Федоров этими терминами не пользовался, и они вышли из употребления. Икосаэдрическая система осей — тройные оси симметрии, перпендикулярные граням икосаэдра (описанного около шара на фиг. 45, стр. 131); додекаэдрическая система — пятерные оси, перпендикулярные граням додекаэдра (многогранник, вписанный в шар; фиг. 43, стр. 127); триаконтаэдрическая — двойные оси, перпендикулярные граням ромбического триаконтаэдра (фиг. 49, стр. 135); октаэдрическая (тригональная) система осей — тройные оси, перпендикулярные граням октаэдра (фиг. 45, стр. 131); кубическая — четверные оси, перпендикулярные граням куба (фиг. 45); додекаэдрическая (ромбическая, призматическая) — двойные оси, перпендикулярные граням ромбического додекаэдра (фиг. 47, стр. 134); тетраэдрическая — тройные оси, перпендикулярные граням тетраэдра (фиг. 37, стр. 119).

[59] (стр. 188). Термином „голоэдрический" часто пользуются до сих пор. Термин „гомоэдрический" не применяется.

[60] (стр. 189). В оригинале опечатка: последний угол указан 60°.

[61] (стр. 195). На основании теоремы 17 (стр. 49).

[62] (стр. 197). Плагиэдрическая гемиэдрия — пентагон-триоктаэдрический вид симметрии кубической сингонии.

[63] (стр. 199). Тетартоэдрическая фигура с четвертью граней сравнительно с полногранными (голоэдрическими).

[64] (стр. 201). См. таблицу изоэдров (стр. 166—167, № 8).

[65] (стр. 201). По теореме 16 (стр. 45).

[66] (стр. 208). В оригинале „точка *a*" — очевидная опечатка.

[67] (стр. 223). А. Браве. Исследование о многогранниках симметрической формы. Русск. пер. Я. Самойлова. Вестник опытной физики и элементарной математики, Одесса, 1896. Позднее, в 1910 г., в статье „Кристаллография за сорок лет" (Зап. Горн. инст., т. 2, вып. 5, стр. 371) Е. С. Федоров менее одобрительно отзывается об этом сочинении Браве, сопоставляя его с содержанием значительно более глубоких работ Гадолина и Гесселя. В упомянутой статье автор говорит: „Этот делающий шаг назад труд. . ., в котором не дано ответа на самый первый вопрос учения о симметрии: что такое элемент симметрии. . ., делается источником его особенной известности. . ., а в 1896 г., когда он, особенно для России, является окончательно устаревшим, появляется в русском переводе".

[68] (стр. 225). Перевод: „Кристаллы суть калейдоскопические фигуры, и система, к которой принадлежит отдельный кристалл, может быть определена с помощью зеркальных углов калейдоскопа".

[69] (стр. 225). Позднее Е. С. Федоров стал придерживаться новых названий для подразделений систем или видов симметрии. Эти послед-

№	Е. С. Федоров		Федоровский институт, 1934	
	Начала учения о фигурах, 1885	Курс кристаллографии, 1897	По элементам симметрии	По общей форме
	Триклинная сингония			
1	Пирамидальная тетартоморфия	Гемипинакоидальный	Примитивный	Моноэдрический
2	Дельтоэдрическая тетартоэдрия	Пинакоидальный	Центральный C	Пинакоидальный
	Моноклинная сингония			
3	Пирамидальная тетартоэдрия	Гемипризматический осевой	Планальный P	Диэдрический безосный
4	Трапецоэдрическая тетартоэдрия	Гемипризматический безосный	Аксиальный G_2	Диэдрический осевой
5	Скаленоэдрическая гемиэдрия	Ромбо-призматический	Планаксиальный G_2PC	Призматический
	Ромбическая сингония			
6	Гемиэдрия (или гемиморфия)	Ромбо-сфеноэдрический	Планальный G_22P	Ромбо-тетраэдрический
7	Трапецоэдрическая гемиэдрия	Ромбо-пирамидальный	Аксиальный $3G_2$.	Ромбо-пирамидальный
8	Гомоэдрия (или голоэдрия)	Ромбо-бипирамидальный	Планаксиальный $3G_23PC$	Ромбо-дипирамидальный

(Продолжение)

№	Е. С. Федоров		Федоровский институт, 1934	
	Начала учения о фигурах, 1885	Курс кристаллографии, 1897	По элементам симметрии	По общей форме
	Тригональная сингония			
9	Пирамидальная тетартоморфия	Тригонально-пирамидальный	Примитивный G_3	Тригонально-пирамидальный
10	Дельтоэдрическая тетартоэдрия	Ромбоэдрический	Центральный G_3C	Ромбоэдрический
11	Бипирамидальная тетартоэдрия	Дитригонально-пирамидальный	Планальный G_33P	Дитригонально-пирамидальный
12	Трапецоэдрическая тетартоэдрия	Тригонально-трапецоэдрический	Аксиальный G_33G_2	Дитригонально-трапецоэдрический
13	Скаленоэдрическая гемиэдрия	Гексагонально-скаленоэдрический	Планаксиальный G_33G_23PC	Дитригонально-скаленоэдрический
	Тетрагональная сингония			
14	Пирамидальная гемиморфия	Тетрагонально-пирамидальный	Примитивный G_4	Тетрагонально-пирамидальный
15	Бипирамидальная гемиэдрия	Тетрагонально-бипирамидальный	Центральный G_4PC	Тетрагонально-дипирамидальный
16	Гемиморфия	Дитетрагонально-пирамидальный	Планальный G_44P	Дитетрагонально-пирамидальный
17	Трапецоэдрическая гемиэдрия	Тетрагонально-трапецоидальный	Аксиальный G_44G_2	Тетрагонально-трапецоэдрический

(Продолжение)

№	Е. С. Федоров		Федоровский институт, 1934	
	Начала учения о фигурах, 1885	Курс кристаллографии, 1897	По элементам симметрии	По общей форме
18	Гомоэдрия	Дитетрагонально-бипирамидальный	Планаксиальный $G_4 4G_2 5PC$	Дитетрагонально-дипирамидальный
19	Дельтоэдрическая тетартоэдрия	Тетрагонально-сфеноэдрический	Гироидо-примитивный G_{i_4}	Тетрагонально-тетраэдрический
20	Скаленоэдрическая гемиэдрия	Тетрагонально-скаленоэдрический	Гироидо-планальный $G_{i_4} 2G_2 2P$	Тетрагонально-скаленоэдрический
	Гексагональная сингония			
21	Пирамидальная гемиморфия	Гексагонально-пирамидальный	Примитивный G_6	Гексагонально-пирамидальный
22	Бипирамидальная гемиэдрия	Гексагонально-бипирамидальный	Центральный G_6PC	Гексагонально-дипирамидальный
23	Гемиморфия	Дигексагонально-пирамидальный	Планальный $G_6 6P$	Дигексагонально-пирамидальный
24	Трапецоэдрическая гемиэдрия	Гексагонально-трапецоэдрический	Аксиальный $G_6 6G_2$	Гексагонально-трапецоэдрический
25	Гомоэдрия	Дигексагонально-бипирамидальный	Планаксиальный $G_6 6G_2 7PC$	Дигексагонально-дипирамидальный

(Продолжение)

№	Е. С. Федоров		Федоровский институт, 1934	
	Начала учения о фигурах, 1885	Курс кристаллографии, 1897	По элементам симметрии	По общей форме
26	Бипирамидальная тетартоэдрия	Тригонально-бипирамидальный	Гироидо-примитивный G_{i_6}	Тригонально-дипирамидальный
27	Гемиэдрия	Дитригонально-бипирамидальный	Гироидо-планальный $G_{i_6}3G_2 4P$	Дитригонально-дипирамидальный
	Кубическая сингония			
28	Тетартоэдрия	Тетартоэдрический	Примитивный $3G_2 4G_3$	Пентагон-тритетраэдрический
29	Гемиэдрия додекаэдрическая или параллельногранная	Додекаэдрический	Центральный $3G_2 4G_3 3PC$	Дидодекаэдрический
30	Тетраэдрическая гемиэдрия	Тетраэдрический	Планальный $3G_2 4G_3 6P$	Гексатетраэдрический
31	Гироэдрическая или плагиэдрическая гемиэдрия	Гироэдрический	Аксиальный $3G_4 4G_3 6G_2$	Пентагон-триоктаэдрический
32	Полногранное, голоэдрическое, гомоэдрическое	Октаэдрический	Планаксиальный $3G_4 4G_3 6G_2 9PC$	Гексоктаэдрический

ние названия (по общей форме) применяются и в настоящее время. Приводим сопоставление названий 32 видов симметрии кристаллов по Федорову из „Начал“ (1885) и из его „Курса кристаллографии“ (1897), с названиями и обозначениями видов симметрии по номенклатуре, разработанной в Федоровском институте в Ленинграде в 1934 г. (стр. 397—400).

[70] (стр. 227). Подставляем значения P, Q, R из (3) в уравнение (2).

[71] (стр. 231). Учение о выполнении плоскости и пространства, впервые рассмотренное Е. С. Федоровым в настоящем отделе, легло позднее в основу разработанной им теории структуры кристаллов, которая сыграла столь выдающуюся роль в развитии кристаллографии и ее перестройке на основе этой теории. После Е. С. Федорова вопрос о параллелоэдрах рассматривался Кельвином (1894) и Минковским (1896). Дальнейшее развитие этой проблемы мы находим во впервые опубликованном в 1908—1909 гг. мемуаре крупнейшего русского математика Г. Ф. Вороного „Исследование о примитивных параллелоэдрах“ (см.: Г. Ф. Вороной, Сочинения, т. 2, Киев, Изд. АН УССР, 1952, стр. 239), а также в трудах крупнейших советских геометров: чл.-корр. АН СССР Б. Н. Делоне, проф. О. К. Житомирского и чл.-корр. АН СССР А. Д. Александрова (см.: Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд. АН СССР, 1947, стр. 197—318).

Излагаемый Федоровым в данном сочинении полный вывод выпуклых параллелоэдров явился фундаментом для разработки вопроса о четырех типах структуры кристаллов (кубическая, центрогранная, гранецентрированная и гексагональная) и построения первой естественной классификации всего мира кристаллов (см. „Царство кристаллов“ Е. С. Федорова, изданное в 1920 г. в „Записках Российской Академии Наук“ по физико-математическому отделению, VIII серия, т. 34, текст LXXIV + 1050 стр. и атлас). На этой основе Е. С. Федоровым были разработаны первые методы определения структуры кристаллов, исходя из их внешней формы, и созданы методы кристаллохимического анализа, которые с успехом используются и в настоящее время. Эти работы Е. С. Федоров предпринял, чтобы доказать правильность своих теоретических построений о структуре кристаллов путем практического их применения. При этом он исходил из того положения, что внешняя форма, хотя и зависит от внешних условий кристаллизации, но главнейшим образом она зависит от внутреннего строения кристаллов. Таким образом, от чисто геометрических вопросов, изложенных в настоящем отделе, Е. С. Федоров в дальнейших своих исследованиях перешел к наиболее глубоким вопросам теоретической кристаллографии.

[72] (стр. 251). В оригинале на фиг. 102 отрезок ab отсутствует.

[73] (стр. 279). В оригинале на фиг. 116 опечатка: точка b_1' неправильно обозначена как o_1'.

[74] (стр. 286). Вывод параллелоэдров повторен Е. С. Федоровым в несколько более упрощенном виде в приложении к курсу кристаллографии (см.: Е. С. Федоров. Курс кристаллографии. 1897, стр. 356—357), а также в „Сокращенном курсе кристаллографии" (СПб., 1910, стр. 62—79).

[75] (стр. 295). К вопросу о пчелиных ячейках Е. С. Федоров возвращается значительно позже, а именно в 1915 г. в статье „Разум и инстинкт" (журн. „Природа", № 7—8, стр. 895—906). В ней Федоров рассматривает вопрос о пчелиных ячейках значительно подробнее, чем в данном подстрочном примечании.

[76] (стр. 297). Развитие этих представлений Е. С. Федорова можно найти в современном учении о плотнейших упаковках в кристаллических структурах. Кубическая плотнейшая упаковка шаров, как известно, сходится с системой, соответствующей ромбическому додекаэдру.

[77] (стр. 302). В тесной связи с изложенным Е. С. Федоров в дальнейших своих работах делит все царство кристаллов на два типа, резко отличных друг от друга: тип гексагональный (или гипогексагональный) и тип кубический. В настоящее время подразделения кристаллов на указанные два типа связываются с гексагональной и кубической плотнейшими упаковками структурных единиц кристаллов.

[78] (стр. 308). Разбираемый здесь вопрос о разделении параллелоэдров на равные части, называемые автором стереоэдрами, позволил Е. С. Федорову осуществить полный вывод правильных систем фигур, или 230 геометрических законов, по которым могут располагаться частицы, строящие кристаллические структуры. Именно, этот раздел своей первой книги упоминает Е. С. Федоров в сочинении „Симметрия правильных систем фигур" (Зап. Мин. общ., 2-я серия, т. 28, стр. 2—3, 1891; переиздано в книге: Е. С. Федоров. Симметрия и структура кристаллов. Изд. АН СССР, 1949, стр. 112, 113), говоря, что „в «Началах учения о фигурах» указан вывод всех подразделений кристаллографических систем из правильных систем фигур". „Полного вывода самых правильных систем фигур в этом сочинении сделано не было, да это и не соответствовало бы его элементарному характеру".

[79] (стр. 309). На фиг. 124 согласно тексту заменены три обозначения.

[80] (стр. 310). Здесь, в примечании, а также в примечании на стр. 312, впервые четко сформулировано отличие понятия Федорова о правильных системах точек и фигур от соответственного понятия Зонке и отмечена ошибка последнего. Зонке, как известно, не учел того, что в правиль-

ных системах могут быть элементы симметрии второго рода (плоскости симметрии, плоскости скользящего отражения, инверсионные оси), в результате им было выведено всего 65 пространственных групп, содержащих лишь оси симметрии и винтовые оси. Понятие, впервые сформулированное Е. С. Федоровым в „Началах", легло в основу его гениального вывода 230 пространственных групп.

[81] (стр. 310). Перевод: „Всякая правильная бесконечная во всех направлениях система точек состоит в общем из нескольких вставленных друг в друга конгруэнтных пространственных решеток. В специальных частных случаях она упрощается в единичную пространственную решетку. Периоды трансляций системы тождественны с таковыми у положенных в основании ее пространственных решеток".

[82] (стр. 313). Перевод: „Система точек неограниченного протяжения называется правильной в том случае, когда пучки линий, проведенные из каждой точки к другим точкам, совмещаются, совпадают друг с другом, причем они или все конгруэнтны, или частично конгруэнтны, частично симметричны".

[83] (стр. 322). Перевод: „. . . такие полиэдры, что всякий замкнутый контур, проведенный на его поверхности и не пересекающийся сам с собой, разделяет эту поверхность на две отдельные области".

[84] (стр. 327). Эти обозначения встретятся на фиг. 126, 128—130, 133 и на таблице типических изокойлоэдров (стр. 333—335).

[85] (стр. 334). На фиг. 130 этот знак выглядит, как пятиконечная звезда. Федоровские обозначения на рисунках пояснены в подстрочном примечании на стр. 327.

[86] (стр. 341). Данное выражение сравнивается автором с выражением, выведенным в самой теореме 18 (стр. 50), между тем в оригинале, очевидно по недосмотру, говорится о выражении следствия теоремы 18.

[87] (стр. 346). Пунктир в таком смысле использован автором на фиг. 135 и сл.

[88] (стр. 346). См. на вклейке (стр. 366—367) таблицу типических изокойлоэдров голоэдрического отделения кубо-октаэдрической системы.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Анизоэдры 155
Архимедовы фигуры 16
Асимметрическая система 77

Бипирамида 166
Бипризмоиды 151
Бискаленоэдр 144

Вид многогранников 80, 82
Винтовые параллелоэдры 314
Внешний угол сфеноида первого рода 65
— — — второго рода 65, 66
Возможная плоскость 315
— прямая 315
Вторичные фигуры 238
Вторичный параллелоэдр 314
Выполнение плоскости 234
— — в параллельном положении 234
— пространства 283
— — в параллельном положении 284

Галоэдр 21
Гексакис-икосаэдр 127, 166
— -октаэдр 126, 166
— -тетраэдр 125, 166
Гексапараллелоэдр 294
— вогнутый 306
— обыкновенный 298
— удлиненный 298
Гемиморфия 218, 225—226
Гемиэдрия 218, 225—226
Генетический закон симметрии 218
Гептапараллелоэдр 298
— вогнутый 306
Гироэдрическая гемиэдрия 197
Гироэдрическое отделение кубической системы 197
Голоэдрия 225—226
Гомоэдрия 218, 225—226
Гоноэдр 20, 25, 35, 37
— вогнутый 41
Гоноэдрические зеркала 224, 225, 366
Гоноэдры выпуклые 36
— дополнительные 36
— острые 41
— полигональные 36
— полярные 36
— правильные 36
— равномерные 38
— равные 35
— симметричные 35
— тупые 41
Гранатоэдр 20

Декагональная система 210
Дельтоид-додекаэдр 133, 134, 168
Дельтоэдр 135, 168
Дипараллелогон 238
— второго порядка 246

Дисфеноид 74
Додекаэдр 90, 127
Додекаэдрическая гемиэдрия 194
Додекаэдрическое отделение кубической системы 194
Додекаэдроиды 152
Додекаэдро-икосаэдр 134, 164
— -икосаэдрическая система 201

Зоноэдр 256
Зоноэдры, вывод 259
— второго рода 267
— пентагональные 263
— первого рода 267
— полярные 276
— равнобедренные 271, 289
— с различными гранями 266
— тетрагональные 263
— тригональные 263

Измененный подтипический многогранник 87
Изогон (равноугольник) 100
— пентагоноэдрический 109, 138, 164
— тетрагоноэдрический 108, 164
— тригоноэдрический 108, 162
Изогоноэдры 259, 262
Изогоны высшей степени 344
Изокойлоэдр 323
Изоэдр (равногранник) 98
— элементарный 182
Изоэдры пентагональные 138, 139, 168, 169
— тетрагональные 168, 169
— тригональные 166, 167
Икосаэдр 89, 127
Индивидуальность многогранников 81

Квадратная система 76
Койлогоны 336
Койлоэдр типический 323
Койлоэдры 321
Конический угол 42, 50
— прямой 51
Косой тетрагоноэдрический притупленный кубо-октаэдр 136
— тригональный пентагон-изоэдр (тетраэдр) 141
— — призмоэдр 141
Куб 90
Кубическая система 188
Кубо-дитетраэдр 133, 134, 164
— -октаэдр 132, 134, 164
— -октаэдрическая система 188

Левый сфеноид 76
Лейцитоэдр 21, 136

Мера растяжения 247, 278
— сдвига 249, 280
Многогранник подтипический 84
— — измененный 87
— правильный 89
— типический 79, 80
— — измененный 80
Многогранника род 97
— центральный угол 88
Многогранники высшей степени 341
— дигональные 116
— пентагоноэдрические 107
— с несплошной поверхностью 322
— со сплошной поверхностью 323
— тетрагоноэдрические 106
— тригоноэдрические 106
— эйлеровы 322
Многогранников индивидуальность 81
— разновидности 81
Многоугольники высшей степени 336
— дигональные 116
— первой степени 336
Моноклиноэдрическая система 76
Моносимметрическая система 76
Мэроэдрия 204, 205

Направление сдвига 249, 280

Неравногранники (анизоэдры) 155
Нетипические изоэдры 142
Нечетнореберники 154

Обратная параллельность 284
Обратное равенство 285
Обыкновенный гексапараллелоэдр 298
Октаэдр 89
Ось растяжения 247
— сдвига 248
— симметрии 179
Отрицательное растяжение 247, 278

Параллелогон аномальный 317
— вторичный 238
— второго порядка 242
— нормальный 317
— первичный 237
— первого порядка 242
— простой 237
— сложный 237, 238
Параллелогоны 234, 235
— , систематический вывод 242
Параллелограмма площадь 251
Параллелоэдры 285, 286
— аномальные 318
— винтовые 314
— вогнутые 305
— вторичные 289, 314
— вывод 292
— выпуклые 305
— нормальные 318
— объем 289
— первичные 289
— простые 290
— сложные 290
Параллельногранная гемиэдрия 194
Параллельное положение 284
Параметры направления 315
Парногранник 271
Парносторонник 235
Пемптоэдрия 148
Пентагональные изоэдры (пентагон-изоэдры) 138, 139, 168, 169
Пентагон-изоэдр пентагональный 141, 168
— равнобедренный 140
— тетрагональный 168
— тригональный 168
Пентагональный призмоэдр 141
Пентагоноэдрические изогоны 109, 138, 164, 165
Пирамидальный додекаэдр 128, 166
— икосаэдр 124, 162, 166
— куб 125, 162, 166
— октаэдр 123, 166
— ромбоэдр 144
— тетраэдр 122, 123, 166
Плагиэдрическая гемиэдрия 197
Планигоны 235, 252
Плоская сетка 239, 288
Плоский пояс 272
Плоскоконические углы 52
Подобие фигур 232
Подтипический многогранник 84
Полногранное отделение кубической системы 188
Положительное растяжение 247
Полюс грани 257
Пояс 256
Пояс вторичный 256
— главный 256
— основной 256
— первичный 256
— побочный 256
— — перекрестный 256
— — поперечный 256
Порядок многогранника 96
Правильная система 76, 188
Правильная система точек 310
— двойная система точек 313
— простая система точек 313
Правильные многогранники, вывод 89
Правильный додекаэдр 162

Правильный икосаэдр 166
— многогранник 89
— тригональный дельтоэдр 132
— — пентагон-изоэдр (додекаэдр) 140
— тригональный призмоид 132, 140
Правый сфеноид 76
Преломленный пентагональный додекаэдр 136, 168
Призмоид 130, 164
— пентагональный 164
— тетрагональный 164
— трапецоидальный 120, 162
— тригональный 164
Призмопирамида 150
Призмоэдр пентагональный 141, 164
— тетрагональный 164
— тригональный 164
Призмоэдры 139
Притупленный дитетраэдр 125, 162
— додекаэдр 124, 162
— додекаэдро-икосаэдр 127, 162
— икосаэдр 128,162
— куб 123, 162
— кубо-октаэдр 126, 162
— октаэдр 125, 162
— тетраэдр 122, 123, 162
Промежутки ряда системы параллелоэдров 287
Пространственная решетка 288
Прямая бипирамида 121
— призма 121
Прямой тетрагоноэдрический притупленный кубо-октаэдр 136
Пятичленный галоэдр 21

Равнобедренный тригональный пентагон-изоэдр (пентагональный додекаэдр) 140
— тригональный призмоэдр 140
Равногранник (=изоэдр) 74, 98
Равноугольник (=изогон) 100
Равноугольный сфеноид 64, 73, 74
Разновидность многогранников 81
Растяжение 247
Растяжение плоской фигуры 247
— положительное 247
— телесной фигуры 278
Род многогранника 97
Ромбическая система 76
Ромбический додекаэдр 78, 132, 134, 168
— триаконтаэдр 134, 168
Сдвиг 248
Сдвиг отрицательный 249
— плоской фигуры 248
— положительный 249
— телесной фигуры 280
Сдвига направление 249, 280
Симметрия 179
Симметричность 285
Система асимметрическая 77
— декагональная 210
— квадратная 76
— кубическая 188
— кубо-октаэдрическая 188
— моноклиноэдрическая 76
— моносимметрическая 76
— параллелогонов 239
— параллелограммов 239, 240
— параллелоэдров 289
— —, соответственные направления 287
— —, промежуток ряда 287
— ромбическая 76
— соответственных точек 239
— триклиноэдрическая 77
Скаленоэдр 120, 121, 166
Сложные фигуры 238
Смежные слои параллелоэдров 288
— — фигур 288
Соответственные направления 239, 240
— — системы паралелловдров 287
Соответственная плоскость системы

параллелоэдров 290
Соответственные плоскости второго порядка 299, 301
— — первого порядка 301
Соответственные прямые второго порядка 299
— точки 98, 239
— — второго порядка 298, 300
— — фигур 287, 288
Спайность 19
Стереоэдры 285, 308
Сфеноид 63
— левый 76
— парногранный 64
— постоянный 63
— равнобедренный 64
— равноугольный 64, 73, 74
Сфеноэдр 119, 162, 166
Сферические трехугольники 32, 33, 34

Тессеральная система 188
Тетартоэдрия 199, 218, 226
Тетрагональные изоэдры 168, 169
Тетрагоноэдр 35
Тетрагоноэдрические изогоны 164, 165
Тетрагоноэдрический притупленный додекаэдро-икосаэдр 137, 164
— притупленный кубо-октаэдр 135, 164
Тетрапараллелоэдр 298
Тетрапирамида 144
Тетраэдр 63, 89
Тетраэдр правильный 74
— постоянный 63
Тетраэдрическая гемиэдрия 192
Тетраэдрическое отделение кубической системы 192, 199
Типическая фигура 262
Типический изокойлоэдр 324
— койлоэдр 323
Типический изоэдр 98
— многогранник 79, 80
Трапецоэдр 130, 168
Трапецоэдральный призмоид 120, 162
Триакис-икосаэдр 137, 168
— -октаэдр 135, 136, 146, 168
— -тетраэдр 133
Тригональные изоэдры 166, 167
— призмоэдры равнобедренные 140
Тригоноэдр 35, 41, 45
Тригоноэдрические изогоны 162, 163
Тригоноэдры косолежащие 43
— накрестлежащие 42, 43
— противолежащие 42, 44
— прямые 41
— смежные по грани 40
— — по ребру 40
— соответственно косолежащие 43, 44
— соответственные 42
Триклиноэдрическая система 77
Трипараллелогон 238, 292
— второго порядка 246
Трипараллелоэдр 298
Тритоэдрия 146

Углы взаимодополнительные трехгранные 30
— плоскоконические 52
— полярные трехгранные 30
— противоположные 40
Угол вертикальный трехгранный 25
— многогранный 35
— правильный трехгранный 26
— прямой трехгранный 25
— прямоугольный трехгранный 25
— равнобедренный трехгранный 26
— симметричный трехгранный 25
— трехгранный 25, 26, 28, 29, 35
— четырехгранный 35
Удлиненный гексапараллелоэдр 298
— ромбический додекаэдр 294

Фигуры аномальные 315
— архимедовы 16
— вторичные 238
— нормальные 315
— открытые 23
—, подобие 232
— полярные 275
— сложные 238
— сомкнутые 61
— элементарные 181
Формула основная полярно-зоноэдрическая 275

Центральный дополнительный угол 89
— угол многогранника 88
Центры граней 299
— системы 298
— фигур 298

Четнореберники 154
Четноугольник 235

Шар 90

Эйлеровы многогранники 322

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Начала учения о фигурах

Оглавление (автора) 9
Предисловие 15
Отдел I. Фигуры открытые 23
Отдел II. Фигуры сомкнутые 61
Отдел III. Учение о симметрии 177
Отдел IV. Учение о поясах и выполнении плоскости и пространства 229
Отдел V. О многогранниках с вогнутыми углами, действительными или кажущимися 319

Приложения

Послесловие. *О. М. Аншелес, И. И. Шафрановский* и *В. А. Франк-Каменецкий* 369
„Начала учения о фигурах“ Е. С. Федорова и их значение для кристаллографии. *В. А. Франк-Каменецкий* 371
Примечания. *О. М. Аншелес, В. А. Франк-Каменецкий* и *И. И. Шафрановский* 391
Предметный указатель 404

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Академии Наук СССР

*

Редактор издательства *Л. С. Сазонов*
Технический редактор *А. В. Смирнова*
Корректоры *З. И. Савинова* и *А. В. Сорокина*

*

РИСО АН СССР № 5297. Пл. № 10—77 В. М.39703. Подписано к печати 5/VIII 1953 г. Бумага 70X92 1/16. Бум. л. 12 7/8. Печ. л. 30.12. Уч.-изд. л. 19.66 + 5 вкл. (1.29 уч.-изд. л.).
Тираж 4000. Зак. № 766.
Номинал по прейскуранту 1952 г. 16 р. 35 к.

1-я типография Издательства АН СССР
Ленинград, В. О., 9 линия, дом 12.

1-я ТИПОГРАФИЯ
ИЗДАТЕЛЬСТВА АКАДЕМИИ НАУК СССР
Ленинград, 34. В. О., 9-я линия, 12

КОНТРОЛЕР № 2

При обнаружении недостатков в книге просим возвратить книгу вместе с этим ярлыком для обмена

ОПЕЧАТКИ

Страница	*Строка*	*Напечатано*	*Должно быть*
108	6 сн.	$\frac{f-5}{f-2}4b$	$\frac{f-5}{f-2}4d$
126	6 св.	гексакис-октаэдр	и гексакис-октаэдр
256	1 сн.	парвичный	первичный
264	7 св.	$i = \frac{n-1}{}$	$i = \frac{n-1}{2}$
266	9 и 13 св.	нечто иное	не что иное
268	6 св.	$30 = (4+5+6)$	$30 = 2(4+5+6)$
351	Фиг. 150, верхний левый квадрант	Должна быть буква *b*	
364	6—5 сн.	откаэдром	октаэдром
402	6 св.	357)	367)

Е. С. Федоров. Начала учения о фигурах.

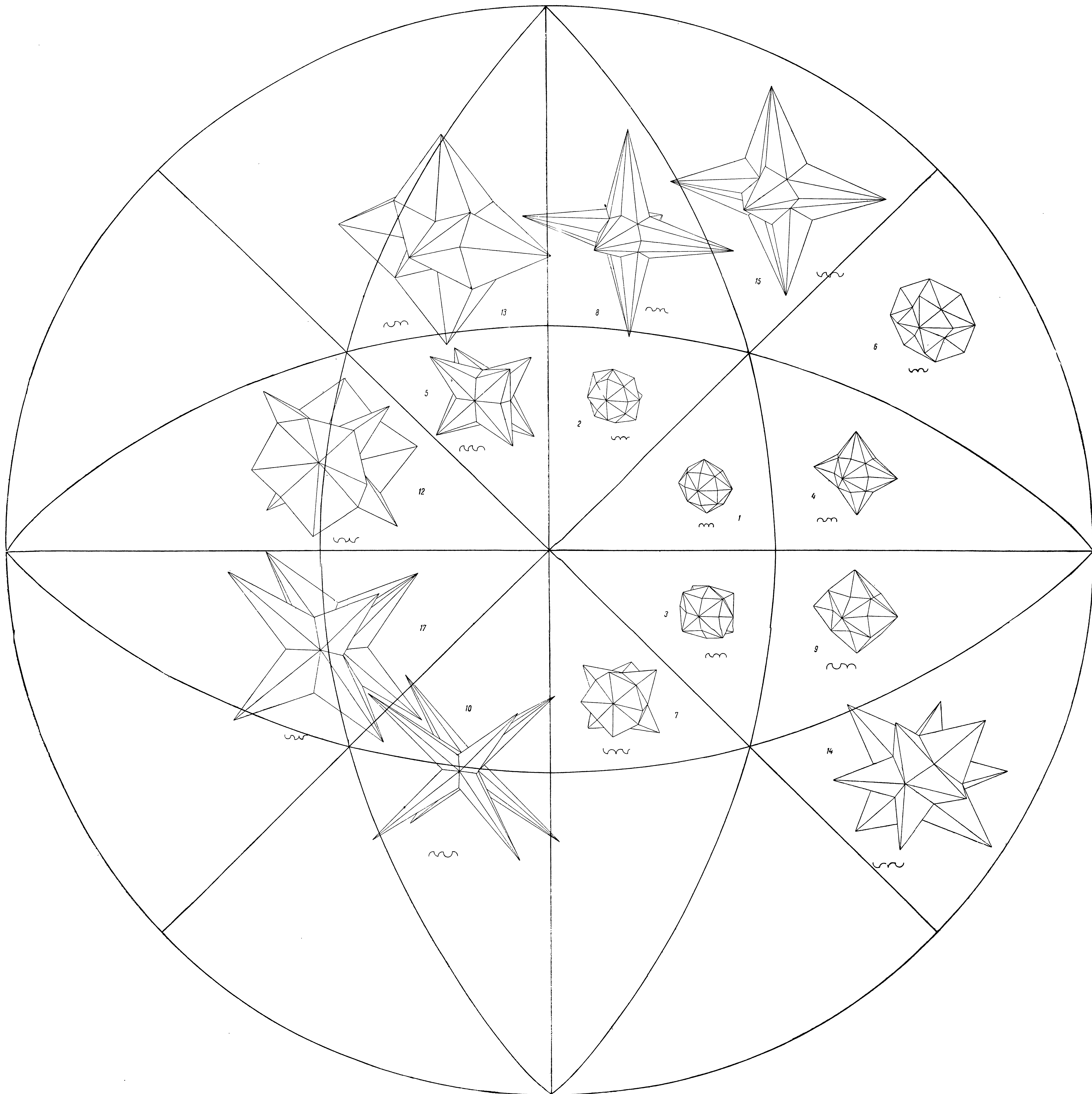


Таблица типических изокойлоэдров гомоэдрического отделения кубо-октаэдрической системы.

НАЧАЛА

УЧЕНІЯ О ФИГУРАХЪ

Ѳ. С. Федорова.

(СЪ 18-Ю ТАБЛИЦАМИ ЧЕРТЕЖЕЙ.)

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
(ВАС. ОСТР., 9 ЛИН., № 12.)
1885.

Ясно, что мы получимъ типическій [illegible] эдръ, если взявъ где-нибудь [вне основного тригоноэдра] на сфере точку, а при-
нявъ ее за точку касанія и проведя плоскость касательную при ней къ сфере, а затемъ найдя это примемъ фигуру пересеченія ея съ гранями основного гоноэдра. Но очевидно, что не всякая точка на сфере можетъ служить для этой цели такъ какъ можно предположить столь удаленную точку, что касательная при ней плоскость не пересечетъ грани основного гоноэдра. Для этого ограничимъ ~~границы~~ пределы для такихъ точекъ. Ясно, что пределами этими будетъ тригоноэдръ, дополнительный основному, какъ это показано на фиг. где основной тригоноэдръ KOZ отмеченъ толстыми чертами. Въ пределахъ этого дополнительного тригоноэдра KOZ (где K, O и Z означаютъ его стороны), все точки могутъ быть точками касанія типическихъ изопараллелоэдровъ ~~KOZ~~ [соответственныхъ точкамъ] его сторонамъ касательныя плоскости будутъ параллельны совершенно

Страница из рукописи «Начала учения о фигурах».



Е. С. Федоров (1873).



Е. С. Федоров. 1883 г.

Е. ФЕДОРОВ

НАЧАЛА
УЧЕНИЯ
О
ФИГУРАХ



